1.2 Matrizen

Bemerkung: Ab sofort werden wir statt „Es sei $(K,+,\cdot)$ ein Körper" nur mehr kurz „Es sei K ein Körper" schreiben.

Definition: Es sei $m,n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und K ein Körper. Unter einer $m\times n$-Matrix A (über K) versteht man ein „rechteckiges Schema von Zahlen" $a_{ij} \in K$ (mit $1\le i\le m$, $1\le j\le n$) der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Menge aller $m\times n$-Matrizen über K bezeichnen wir mit $M_{m,n}(K)$. Ist $m=n$, so schreiben wir statt $M_{n,n}(K)$ nur kurz $M_n(K)$.

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 5 & 7 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{Q}), \quad \begin{pmatrix} 1+i & -1-i \\ 27i & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & e \\ \pi & e^{\pi\sqrt{163}} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

Bemerkungen: 1) Formal sauberer (aber weniger anschaulich) kann man eine $m\times n$-Matrix als eine Abbildung $\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \to K$, $(i,j) \longmapsto a_{ij}$ definieren.

2) Zwei Matrizen $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ und $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ aus $M_{m,n}(K)$ sind gleich (d.h. $A=B$) genau dann wenn $a_{ij}=b_{ij}$ für alle $(i,j)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$.

3) Für $n=1$ erhält man als wichtigen Spezialfall Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in M_{m,1}(K)$ und für $m=1$ Zeilenvektoren $(a_{11}\ a_{12}\ \cdots\ a_{1n}) \in M_{1n}(K)$.

4) Für die Menge aller $m\times n$-Matrizen wird in der Literatur eine große Zahl anderer Bezeichnungen verwendet, z.B. $\mathrm{Mat}(m,n;K)$ oder $K^{m\times n}$.

Definition Es sei K ein Körper. Für zwei Matrizen $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(K)$ definiert man ihre Summe als $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$, also

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

Satz 11 Es sei K ein Körper. Dann ist $(M_{m,n}(K), +)$ eine abelsche Gruppe.

Beweis: Abgeschlossenheit ergibt sich unmittelbar aus der Definition.

$$\left((a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\right) + (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \left((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

$$= \left(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + \left((b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}\right)$$

Neutrales Element ist die Nullmatrix $O = (0)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, bei der alle Eintragungen das Nullelement des Körpers K sind.

Inverses Element zu $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ ist $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = (b_{ij}+a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

$$= (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} + (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

Definition Es sei K ein Körper. Man ordnet der Matrix

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

die transponierte Matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(K)$$

zu. D.h. ist $A^T = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\1\le l\le m}}$, so ist $b_{kl} = a_{lk}$ für $1\le k\le n$, $1\le l\le m$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen: 1) Statt A^T findet man auch A^t und andere Bezeichnungen für die Transponierte der Matrix A.

2) Transponieren ist eine Abbildung $M_{m,n}(K) \longrightarrow M_{n,m}(K)$.

3) Es gelten die Rechenregeln $(A^T)^T = A$ und $(A+B)^T = A^T + B^T$.

4) Transponieren führt Zeilen- in Spaltenvektoren über und umgekehrt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T = (a_1 \cdots a_n) \; , \; (a_1 \cdots a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definition Es sei K ein Körper. Zwei Matrizen $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(K)$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le k\le l}} \in M_{n,l}(K)$ ordnet man ihr Produkt $A \cdot B = (c_{ik})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le k\le l}} \in M_{m,l}(K)$ zu, wobei $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$ (für $1 \le i \le m$, $1 \le k \le l$), d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nk}} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

Hat man nicht viel Übung, so hilft es, die Matrizen so aufzuschreiben:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1k}} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nk}} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{il} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{ml} \end{pmatrix} \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 5\cdot 2 & 2\cdot 4 + 1\cdot 2 + 5\cdot 1 \\ 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 & 1\cdot 4 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 23 \\ 0 & 5 & -1 \\ 5 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Das Produkt einer $m\times n$-Matrix und einer $n\times l$-Matrix ist eine $m\times l$-Matrix, d.h. Matrizenmultiplikation ist eine Abbildung $M_{m,n}(K)\times M_{n,l}(K)\to M_{m,l}(K)$. Insbesondere ist das Produkt eines Zeilen- und eines Spaltenvektors (mit gleich vielen Eintragungen) ein Körperelement, da es sich um eine Abbildung $M_{1,n}(K)\times M_{n,1}(K)\to M_{1,1}(K)=K$ handelt, d.h. $(a_1\cdots a_n)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=a_1b_1+\dots+a_nb_n$.

Beispiel: $(1\ 2\ 3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}=1\cdot1+2\cdot0+3\cdot5=16$, aber $\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\cdot(1\,2\,3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\5&10&15\end{pmatrix}$.

Satz 12 Es sei K ein Körper, $A\in M_{m,n}(K)$, $B\in M_{n,r}(K)$ und $C\in M_{r,s}(K)$. Dann ist $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$.

Beweis: Es seien $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=(b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le r}}$ und $C=(c_{kl})_{\substack{1\le k\le r\\1\le l\le s}}$.

Dann ist $A\cdot B=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le r}}$ und $B\cdot C=\left(\sum_{k=1}^r b_{jk}c_{kl}\right)_{\substack{1\le j\le n\\1\le l\le s}}$ und daher

$$(A\cdot B)\cdot C=\left(\sum_{k=1}^r\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}}=\left(\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r a_{ij}b_{jk}c_{kl}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\left(\sum_{k=1}^r b_{jk}c_{kl}\right)\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le l\le s}}=A\cdot(B\cdot C)$$

Satz 13 Es sei K ein Körper.

(i) Ist $A\in M_{m,n}(K)$ und $B,C\in M_{n,l}(K)$, so ist $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$,

(ii) Ist $A,B\in M_{m,n}(K)$ und $C\in M_{n,l}(K)$, so ist $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

Beweis: (i) Es seien $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, $B=(b_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le l}}$ und $C=(c_{jk})_{\substack{1\le j\le n\\1\le k\le l}}$. Dann ist

$$A\cdot(B+C)=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}}=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}}+\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le k\le l}}=A\cdot B+A\cdot C$$

(ii) Übung

Definition: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ mit der Eigenschaft $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i,j \leq n$ und $i \neq j$ heißt Diagonalmatrix. D.h. A hat Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei die beiden Nullen aussagen, dass alle Eintragungen in diesem Bereich $0 \, (\in K)$ sein sollen.

Die spezielle Diagonalmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$ heißt Einheitsmatrix.

Satz 14 Es sei K ein Körper und $A \in M_{m,n}(K)$. Dann ist $A \cdot I_n = A$ und $I_m \cdot A = A$.

Beweis: Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, so ist

$$A \cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

Von der zweiten Behauptung überzeugt man sich analog.

Korollar 15 Es sei K ein Körper. Dann ist $(M_n(K), +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement für jedes $n \geq 1$.

Beweis: Dass $(M_n(K), +)$ eine abelsche Gruppe ist, wurde in Satz 11 gezeigt. Die Assoziativität der Multiplikation folgt aus Satz 12 und die Gültigkeit der Distributivgesetze aus Satz 13. Aus Satz 14 folgt, dass $I_n \in M_n$ Einselement ist.

Bemerkung: Für $n \geq 2$ ist der Matrizenring $M_n(K)$ nicht kommutativ. z.B. ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ & 0 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

(Dieses Gegenbeispiel hat den Vorteil, für jeden Körper K zu funktionieren, da es nur die Körperelemente 0 und 1 verwendet, die stets in K enthalten sein müssen.)

Für $n = 1$ ist $(M_n(K), +, \cdot) = (K, +, \cdot)$, d.h. $M_1(K)$ ist ein Körper.

Definition: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt invertierbar (oder nichtsingulär), wenn sie als Element des Rings $(M_n(K), +, \cdot)$ invertierbar ist, d.h. wenn $\exists A^{-1} \in M_n(K) : A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Definition Es sei K ein Körper. Die Teilmenge $\{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ des Rings $M_n(K)$ wird mit $GL_n(K)$ bezeichnet und General Linear Group genannt.

Korollar 16 Es sei K ein Körper. Dann ist $(GL_n(K), \cdot)$ eine Gruppe.

Beweis: Das ist ein Spezialfall von Lemma 10.

Bemerkungen: 1) Für $n \geq 2$ besitzt nicht jede Matrix $\neq 0$ (Nullmatrix) in $M_n(K)$ ein multiplikatives Inverses. Ist z. B.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K) \text{ beliebig, so ist } S \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \neq I_n.$$

2) Für $n \geq 2$ ist die Gruppe $GL_n(K)$ nicht abelsch.

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ist invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, denn

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 17 Es sei K ein Körper, $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,l}(K)$. Dann ist $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Beweis: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ und $B = (b_{jk})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq l}}$, so ist $A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ 1 \leq k \leq l}}$

$A^T = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ und $B^T = (b_{jk})_{\substack{1 \leq k \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$ und daher

$$(A \cdot B)^T = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{1 \leq k \leq l \\ 1 \leq i \leq m}} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{jk} a_{ij} \right)_{\substack{1 \leq k \leq l \\ 1 \leq i \leq m}} = B^T \cdot A^T.$$

Korollar 18: Es sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Ist A invertierbar, so ist auch A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: Aus $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ folgt $(A \cdot A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I_n^T = I_n$ und daher (wegen Satz 17) $(A^{-1})^T \cdot A^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I_n$. Also ist A^T invertierbar und (wegen der Eindeutigkeit des Inversen) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

6.10.2021