1.3 Vektorräume

__Definition__ Es sei $V \neq \emptyset$ eine Menge und K ein Körper. Weiters seien zwei Abbildungen $V \times V \to V$, $(v,w) \mapsto v+w$ und $K \times V \to V$, $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$ gegeben, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

1) $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe, dh

- $\forall u,v,w \in V: \ (u+v)+w = u+(v+w)$
- $\exists \sigma \in V \ \ \forall v \in V: \ \sigma + v = v + \sigma = v$
- $\forall v \in V \ \ \exists -v \in V: \ v+(-v) = (-v)+v = \sigma$
- $\forall v,w \in V: \ v+w = w+v$

2.1) $\forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall v \in V: \ (\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$

2.2) $\forall \alpha \in K \ \ \forall v,w \in V: \ \alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

2.3) $\forall \alpha, \beta \in K \ \ \forall v \in V: \ (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

2.4) $\forall v \in V: \ 1 \cdot v = v$ (wobei 1 das Einselement des Körpers K bezeichnet)

Dann heißt V Vektorraum über K oder kurz K-Vektorraum. Die Elemente von V werden Vektoren, die von K Skalare genannt. K wird Skalarkörper des Vektorraums V genannt.

__Bemerkungen:__ 1) In vielen wichtigen Fällen ist $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$. Der Vektorraum V wird dann ein reeller bzw. komplexer Vektorraum genannt.

2) Da $(V,+)$ eine abelsche Gruppe ist, gelten alle dafür in Abschnitt 1.1 gezeigten Aussagen.

3) Auch in Vektorräumen schreibt man kurz $v-w$ statt $v+(-w)$ für Vektoren $v,w \in V$ (dh $v - w := v + (-w)$).

4) Das neutrale Element σ der abelschen Gruppe $(V,+)$ wird als Nullvektor bezeichnet. Der Nullvektor wird oft ebenfalls mit 0 bezeichnet. Wir schreiben dafür σ, um ihn vom Nullelement des Körpers K zu unterscheiden.

5) Die Symbole $+$ und $\cdot$ haben in den Vektorraumaxiomen 2.1) – 2.4) zwei verschiedene Bedeutungen:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v) \qquad\qquad (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

Multiplikation im Körper

Multiplikation von Skalaren und Vektoren

Summe im Körper

Summe von Vektoren

6) Auch bei Vektorräumen muss man sich gegebenenfalls überzeugen, dass V bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist (d.h. $v+w \in V$ $\forall v,w \in V$ und $\alpha \cdot v \in V$ $\forall \alpha \in K$ $\forall v \in V$) und eventuell, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind.

<u>Beispiele</u>: 1) $\mathbb{R}^2$ mit Addition $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ (für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$) ist ein (reeller) Vektorraum.

Wir haben bereits auf Seite 2 gezeigt, dass $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

$$(\alpha\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)x \\ (\alpha\beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\beta x) \\ \alpha(\beta y) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \left(\beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(x_1+x_2) \\ \alpha(y_1+y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \alpha x_2 \\ \alpha y_1 + \alpha y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha x_2 \\ \alpha y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha+\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)x \\ (\alpha+\beta)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta x \\ \alpha y + \beta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta x \\ \beta y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x \\ 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2) $\mathbb{R}^3$ mit Addition $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$) ist ein (reeller) Vektorraum

3) Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{R}^n$ mit Addition $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$) ein (reeller) Vektorraum

4) Ist $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und K ein Körper, so ist K^n mit Addition $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$ und skalarer Multiplikation $\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$ (mit $\alpha \in K$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^n$) ein K-Vektorraum.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Beispiel 3) enthält als Spezialfälle die Beispiele 1) und 2) (für $n=2$ bzw. $n=3$).

2) Beispiel 4) enthält als Spezialfall Beispiel 3) (für $K=\mathbb{R}$) und damit auch die Beispiele 1) und 2).

3) Beispiel 4) ist in gewisser Hinsicht der Hauptgegenstand der (endlichdimensionalen) Linearen Algebra. Das liegt daran, dass man zeigen kann, dass jeder endlichdimensionale K-Vektorraum die selbe Struktur wie ein K^n hat (zumindest, was die Struktur <u>als</u> <u>Vektorraum</u>) betrifft!

<u>Beispiele (Fortsetzung)</u>: 5) Es sei $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und K ein Körper. Dann ist $M_{m,n}(K)$ mit der üblichen Addition (wie in Abschnitt 1.2), d.h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

und

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha \in K \text{ und } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

ein K-Vektorraum.

<u>Bemerkung</u>: Wir haben uns einerseits (in Korollar 15) bewiesen, dass $(M_n, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement ist, andererseits ist $M_n(K)$ (wie in Beispiel 5) beschrieben) ein K-Vektorraum. Tatsächlich sind diese beiden algebraischen Strukturen miteinander verträglich, da $(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha \cdot (A \cdot B)$ (mit $\alpha \in K$ und $A, B \in M_n(K)$) gilt. Man bezeichnet eine derartige algebraische Struktur auch als „Algebra" (wie das gesamte Gebiet).

<u>Beispiele (Fortsetzung)</u>: 6) Es sei $\mathcal{F}$ die Menge der reellen Folgen, d.h. $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n \geq 1} \mid a_n \in \mathbb{R} \ \forall n \geq 1\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ mit $(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n \geq 1} := (a_n + b_n)_{n \geq 1}$ und $\alpha \cdot (a_n)_{n \geq 1} := (\alpha a_n)_{n \geq 1}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) ein reeller Vektorraum.

7) Es sei $\mathcal{F}_b$ die Menge der beschränkten reellen Folgen, d.h. $\mathcal{F}_b = \{(a_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F} \mid \exists C > 0 \ \forall n \geq 1 : |a_n| \leq C\}$. Dann ist $\mathcal{F}_b$ mit denselben Verknüpfungen wie in Bsp. 6) ein reeller Vektorraum. Hat man die Vektorraumaxiome für $\mathcal{F}$ überprüft, so gelten alle Rechenregeln offenbar auch für $\mathcal{F}_b$. Wichtig ist es allerdings, die Abgeschlossenheit zu überprüfen: Sind $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_b$, so $\exists C, D > 0 : |a_n| \leq C$ und $|b_n| \leq D \ \forall n \geq 1$ und daher $|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq C + D \ \forall n \geq 1$ und $|\alpha a_n| = |\alpha| |a_n| \leq (|\alpha| + 1) C \ \forall n \geq 1$

8) Es sei $\mathcal{F}_k$ die Menge aller konvergenten reellen Folgen, d.h. $\mathcal{F}_k = \{(a_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F} \mid \lim_{n \to \infty} a_n \text{ existiert}\}$. Dann ist $\mathcal{F}_k$ mit denselben Verknüpfungen wie in Bsp. 6) ein reeller Vektorraum. Die Abgeschlossenheit zeigt man so: Sind $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{F}_k$, so ist $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n$ und $\lim_{n \to \infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n \to \infty} a_n$.

11.10.2021

9) Es sei $\mathcal{F}_n$ die Menge aller reellen Nullfolgen, d.h. $\mathcal{F}_n = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F} \mid \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$.
Dann ist $\mathcal{F}_n$ mit den selben Verknüpfungen wie in Bsp. 6) ein reeller Vektorraum.
Die Abgeschlossenheit zeigt man wie in Bsp. 8): Sind $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_n$,
so ist $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = 0 + 0 = 0$ und $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \cdot 0 = 0$.

Bemerkung: In der Analysis zeigt man $\mathcal{F}_n \subsetneq \mathcal{F}_k \subsetneq \mathcal{F}_b \subsetneq \mathcal{F}$.

Beispiele (Fortsetzung): 10) Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und K ein Körper. Mit K^M bezeichnet man die Menge aller Funktionen $f: M \to K$. Dann ist K^M mit den Verknüpfungen $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (für $f, g \in K^M$, $x \in M$) und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ (mit $f \in K^M$, $x \in M$ und $\alpha \in K$) ein K-Vektorraum.

Bemerkung: Beispiel 10) enthält als Spezialfälle Beispiel 4) (für $M = \{1, \dots, n\}$), Beispiel 5) (für $M = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$) und Beispiel 6) (für $M = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $K = \mathbb{R}$).

Beispiele (Fortsetzung): 11) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (also z.B. $I = [a, b]$ oder $I = (a, b)$ mit $a < b$ oder auch $I = \mathbb{R}$). Dann ist $\mathbb{R}^I = \{f \mid f: I \to \mathbb{R}$ ist Funktion$\}$ mit den Verknüpfungen $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ (mit $f, g: I \to \mathbb{R}$, $x \in I$) und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ (mit $f: I \to \mathbb{R}$, $x \in I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$) ein reeller Vektorraum. (Das ist ein wichtiger Spezialfall von Beispiel 10) mit $M = I$ und $K = \mathbb{R}$.)

12) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $B(I)$ bezeichne die Menge aller beschränkten Funktionen $I \to \mathbb{R}$, d.h. $B(I) = \{f \in \mathbb{R}^I \mid \exists C > 0 \ \forall x \in I : |f(x)| \leq C\}$. Dann ist $B(I)$ mit den selben Verknüpfungen wie in Beispiel 11) ein reeller Vektorraum. (Abgeschlossenheit zeigt man dabei analog zu Beispiel 7).)

13) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $C(I)$ bezeichne die Menge aller stetigen Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Dann ist $C(I)$ mit denselben Verknüpfungen wie in Beispiel 11) ein reeller Vektorraum. (Abgeschlossenheit folgt aus Resultaten der Analysis: Sind $f, g: I \to \mathbb{R}$ stetig, dann sind auch $f+g: I \to \mathbb{R}$ und $\alpha f: I \to \mathbb{R}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) stetig.)

14) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall und $C^\infty(I)$ bezeichne die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Dann ist $C^\infty(I)$ mit den selben Verknüpfungen wie Beispiel 11) ein reeller Vektorraum. (Abgeschlossenheit folgt wieder aus Resultaten in der Analysis.)

Bemerkung: Ist I ein (offenes) Intervall, so gelten $C^\infty(I) \subsetneqq C(I) \subsetneqq \mathbb{R}^I$ und $B(I) \subsetneqq \mathbb{R}^I$. Ist I ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall (d.h. $I=[a,b]$ mit $a<b$), so gilt auch $C(I) \subsetneqq B(I)$ (siehe Analysis).

Definition (Erinnerung): Eine Funktion $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt Polynomfunktion, wenn sie die Gestalt $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ für gewisse $a_n, a_{n-1},\ldots,a_1,a_0\in\mathbb{R}$ besitzt. Ist dabei $a_n\neq 0$ für ein $n\geq 0$ (und n maximal mit dieser Eigenschaft), so sagt man, p habe Grad n und schreibt dafür $\operatorname{grad} p = n$ (oder auch $\deg p = n$). Zusätzlich definiert man: Ist p das Nullpolynom (d.h. $p(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$), so sei $\operatorname{grad} p=-\infty$.

Beispiele (Fortsetzung): 15) Es sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynomfunktionen. Dann ist $P(\mathbb{R})$ mit den selben Verknüpfungen wie in Beispiel 11) ein reeller Vektorraum.

16) Für $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ sei $P_n(\mathbb{R})=\{p\in P(\mathbb{R}) \mid \operatorname{grad} p\leq n\}$. Dann ist $P_n(\mathbb{R})$ mit den selben Verknüpfungen wie in Beispiel 11) ein reeller Vektorraum

Bemerkung: Es gilt $P_0(\mathbb{R}) \subsetneqq P_1(\mathbb{R}) \subsetneqq P_2(\mathbb{R}) \subsetneqq P_3(\mathbb{R}) \subsetneqq \cdots \subseteq P(\mathbb{R}) \subsetneqq C^\infty(\mathbb{R})$.

Beispiele (Fortsetzung): 16) Es sei

$V=\{f\in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f$ erfüllt die Differentialgleichung $f''+f=0$ (d.h. $f''(x)+f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$)$\}$.

Dann ist V mit den selben Verknüpfungen wie in Beispiel 11) ein reeller Vektorraum. Erfüllen $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diese Differentialgleichung, so gilt $f''(x)+f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ und $g''(x)+g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Daraus folgen

$$(f+g)''(x)+(f+g)(x)=f''(x)+g''(x)+f(x)+g(x)=(f''(x)+f(x))+(g''(x)+g(x))=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

und $(\alpha f)''(x)+(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f''(x)+\alpha\cdot f(x)=\alpha\,(f''(x)+f(x))=0 \quad \forall \alpha, x\in\mathbb{R}$.

Jede Funktion der Gestalt $f(x)=\alpha\sin x+\beta\cos x$ (mit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$) ist offenbar in V enthalten. In der Analysis zeigt man, dass man damit bereits ganz V gefunden hat.

17) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ebenso ist $\mathbb{C}$ sowohl ein reeller Vektorraum als auch ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. (Das folgt sofort aus den Rechenregeln für Körper.)

Ganz allgemein gilt folgendes: Es sei L/K eine Körpererweiterung. (D.h. $(L,+,\cdot)$ und $(K,+,\cdot)$ sind Körper, $K\subseteq L$ und K ist Teilkörper von L, d.h. die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf L setzen die Verknüpfungen von K fort.) Dann ist L ein K-Vektorraum.

Bemerkung: Die in Beispiel 17) beschriebene Tatsache ist eine wichtige Grundlage der Körpertheorie. Sie ist (wie die gesamte Algebra) aus der Suche nach Nullstellen von Polynomen entstanden. Eine einfache Anwendung ist die Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Da man kann mit ihrer Hilfe beweisen, dass bestimmte klassische Probleme (wie Dreiteilung eines beliebigen Winkels, Verdoppelung eines Würfels, Quadratur des Kreises, Konstruktion bestimmter regelmäßiger n-Ecke) nur mit Zirkel und Lineal unmöglich sind.

Beispiele (Fortsetzung): 18) Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $\mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Ebenso ist $\mathbb{C}^n$ sowohl ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum als auch ein reeller Vektorraum. Ganz allgemein gilt: Ist L/K eine Körpererweiterung, so ist L^n ein K-Vektorraum.

Lemma 19: Es sei V ein K-Vektorraum. Dann gelten:

(i) $0 \cdot v = o \quad \forall v \in V$,

(ii) $\alpha \cdot o = o \quad \forall \alpha \in K$,

(iii) Aus $\alpha \cdot v = o$ (mit $\alpha \in K, v \in V$) folgt, dass $\alpha = 0$ oder $v = o$,

(iv) $(-1)v = -v \quad \forall v \in V$.

Beweis: (i) Aus $0 \cdot v = (0+0) \cdot v \overset{2.3)}{=} 0 \cdot v + 0 \cdot v$ folgt durch Addition von $-(0 \cdot v)$

$o = 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v - 0 \cdot v = 0 \cdot v$, d.h. die Behauptung.

(ii) Aus $\alpha \cdot o = \alpha \cdot (o + o) \overset{2.2)}{=} \alpha \cdot o + \alpha \cdot o$ folgt durch Addition von $-(\alpha \cdot o)$

$o = \alpha \cdot o - \alpha \cdot o = \alpha \cdot o + \alpha \cdot o - \alpha \cdot o = \alpha \cdot o$, d.h. die Behauptung.

(iii) Es sei $\alpha \cdot v = o$. Ist $\alpha = 0$, so sind wir fertig. Ist $\alpha \neq 0$, so ist

$v \overset{2.4)}{=} 1 \cdot v = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) v \overset{2.1)}{=} \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = \alpha^{-1} \cdot o \overset{(ii)}{=} o$.

(iv) Aus $v + (-1)v \overset{2.4)}{=} 1 \cdot v + (-1) \cdot v \overset{2.3)}{=} (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v \overset{(i)}{=} o$ folgt wegen der Eindeutigkeit von $-v$, dass $(-1)v = -v$.

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum. Eine Menge $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$ heißt Teilraum von V, wenn W bezüglich der Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von V selbst ein K-Vektorraum ist.

Satz 20: Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V, W \neq \emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) W ist Teilraum von V,

(ii) $\forall v, w \in W: v + w \in W$ und $\forall \alpha \in K \; \forall v \in W: \alpha \cdot v \in W$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Folgt sofort aus der Abgeschlossenheit von W.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Assoziativität der Addition von Vektoren (d.h. $(u+v)+w = u+(v+w) \; \forall u,v,w \in W$) gilt, da sie sogar für alle Elemente von V gilt.

Für jedes $v \in W$ ist wegen Lemma 19 (iv) und der Voraussetzung auch $-v = (-1)\cdot v \in W$.
Da $W \neq \emptyset$, existiert ein $v \in W$ und daher ist $\sigma = v - v \in W$.
Kommutativität der Addition von Vektoren (d.h. $v+w = w+v \; \forall v, w \in W$) gilt, da sie sogar für alle Elemente von V gilt.
Damit ist gezeigt, dass $(W,+)$ eine abelsche Gruppe ist.
Die Eigenschaften 2.1) bis 2.4) gelten wieder, da sie sogar auf V gelten.

Beispiele: 1) Jeder Vektorraum V enthält (trivialerweise) die Teilräume $\{\sigma\}$ und V.

2) Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $W_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = \lambda x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$

(d.h. Geraden durch den Ursprung mit Ausnahme der y-Achse) ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$. Um das zu zeigen, reicht es nach Satz 20 zu überprüfen, dass

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ \lambda (x_1 + x_2) \end{pmatrix} \in W_\lambda \quad \text{und} \quad \alpha \begin{pmatrix} x \\ \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha \lambda x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \lambda (\alpha x) \end{pmatrix} \in W_\lambda$$

für $x_1, x_2, \alpha \in \mathbb{R}$ beliebig.

Völlig analog überprüft man, dass $U_\lambda := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = \lambda y \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$ für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ ist (d.h. Geraden durch den Ursprung mit Ausnahme der x-Achse).

Bemerkungen: 1) Beispiel 2) zeigt, dass in $\mathbb{R}^2$ (außer $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathbb{R}^2$) auch jede Gerade durch den Ursprung ein Teilraum ist.

2) Wir werden uns später überlegen, dass $\mathbb{R}^2$ keine weiteren Teilräume enthält.

3) Beachten Sie, dass Geraden, die nicht durch den Ursprung gehen, keine Teilräume des $\mathbb{R}^2$ sind (z.B. weil sie keinen Nullvektor enthalten).

Beispiele (Fortsetzung): 3) $\mathcal{F}_u$ ist Teilraum von $\mathcal{F}_k$, $\mathcal{F}_k$ ist Teilraum von $\mathcal{F}_\theta$, $\mathcal{F}_\theta$ ist Teilraum von $\mathcal{F}$ (was bereits bei ihrer Einführung begründet wurde bzw. aus Resultaten aus der Analysis folgt). (Natürlich sind auch z.B. $\mathcal{F}_u$ und $\mathcal{F}_k$ Teilräume von $\mathcal{F}$.)

4) $C^\infty(I)$ ist Teilraum von $C(I)$, $C(I)$ Teilraum von $\mathbb{R}^I$ und $B(I)$ ist Teilraum von $\mathbb{R}^I$. Ist I ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall, so ist $C(I)$ Teilraum von $B(I)$. (Das folgt aus Resultaten aus der Analysis.)

5) Es seien $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ist $m \leq n$, so ist $P_m(\mathbb{R})$ ein Teilraum von $P_n(\mathbb{R})$.

6) Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist $P_n(\mathbb{R})$ Teilraum von $P(\mathbb{R})$.

7) $P(\mathbb{R})$ ist Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R})$.

8) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f$ erfüllt die Differentialgleichung $f'' + f = 0\}$ ist Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R})$.

Satz 21 Es sei V ein K-Vektorraum und $W_1, \dots, W_n$ Teilräume von V. Dann ist $\bigcap_{i=1}^n W_i = W_1 \cap \dots \cap W_n = \{v \in V \mid v \in W_i$ für $1 \le i \le n\}$ ebenfalls Teilraum von V.

Beweis: $v, w \in \bigcap_{i=1}^n W_i \Rightarrow v, w \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow v + w \in W_i$ für $1 \le i \le n$

$\Rightarrow v + w \in \bigcap_{i=1}^n W_i$ und

$v \in \bigcap_{i=1}^n W_i \Rightarrow v \in W_i$ für $1 \le i \le n \Rightarrow \alpha v \in W_i$ für $1 \le i \le n$ (und $\alpha \in K$ beliebig)

$\Rightarrow \alpha v \in \bigcap_{i=1}^n W_i$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 20

Bemerkungen 1) Satz 21 enthält den folgenden wichtigen Spezialfall: Sind U und W Teilräume des Vektorraums V, so ist auch $U \cap W$ Teilraum von V.

2) Völlig analog kann man die folgende, stärkere Version von Satz 21 beweisen: Ist $I \neq \emptyset$ eine Menge (I ist Indexmenge und kann auch unendlich sein) und W_i ein Teilraum von V für jedes $i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} W_i$ ebenfalls Teilraum von V.

3) $\bigcap_{i=1}^n W_i$ (bzw. $\bigcap_{i \in I} W_i$) ist der größte Teilraum von V, der in allen Teilräumen $W_1, \dots, W_n$ (bzw. W_i mit $i \in I$) enthalten ist.

Beispiele: 1) Es seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $U = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \lambda x \right\}$ und $W = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \mu x \right\}$

Dann ist $U \cap W = \{0\}$ wenn $\lambda \neq \mu$. (Die Inklusion $\{0\} \subseteq U \cap W$ ist trivial.

Es sei nun $\binom{x}{y} \in U \cap W$ und $\binom{x}{y} \neq \binom{0}{0}$. Dann ist $x \neq 0$, da aus $x = 0$ auch $y = \lambda x = 0$ folgt. Weiters ist $\lambda x = y = \mu x$ und daher $(\lambda - \mu) x = 0$. Daraus folgt, dass entweder $\lambda = \mu$ oder $x = 0$ ist. Beides ist unmöglich. Also ist $x = y = 0$ und daher $U \cap W \subseteq \{0\}$.)

Ist $\lambda = \mu$, so ist trivialerweise $U = W$ und daher $U \cap W = U = W$.

2) Es seien

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = z \right\}.$$

Dann sind U und W Teilräume von $\mathbb{R}^3$. Sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U$, so ist

$x_1+y_1+z_1 = x_2+y_2+z_2 = 0$ und daher auch $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 0$,

also $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in U$ und aus $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$ folgt $x+y+z=0$ und daher

$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x+y+z) = 0$, also $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$.

Sind $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$, so ist $x_1 = z_1$ und $x_2 = z_2$ und daher $x_1 + x_2 = z_1 + z_2$, also $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$

und aus $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ folgt $x = z$ und daher $\alpha x = \alpha z$, also $\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$.

Wir behaupten nun $U \cap W = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

Wegen $t - 2t + t = 0$ und $t = t$ (für $t \in \mathbb{R}$ beliebig) ist $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq U \cap W$.

Ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U \cap W$, so ist $x = z$ und $0 = x+y+z = 2x+y$ und daher $y = -2x$.

Also ist $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix} \in \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$, d.h. $U \cap W \subseteq \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

3) Sind $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ist $P_{n_1}(\mathbb{R}) \cap \dots \cap P_{n_k}(\mathbb{R}) = \bigcap_{i=1}^{k} P_{n_i}(\mathbb{R}) = P_{\min\{n_1, \dots, n_k\}}(\mathbb{R})$.

<u>Definition</u>: Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Ein $v \in V$, das die Gestalt $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ (für gewisse $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$) besitzt, heißt Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Ist $M \subseteq V$ (und $M \neq \emptyset$), so heißt $v \in V$ Linearkombination von Vektoren aus M, wenn es $v_1, \dots, v_n \in M$ gibt, derart dass v Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ ist.

<u>Definition</u>: Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$ (und $M \neq \emptyset$). Dann heißt

$$[M] = \{ v \in V \mid v \text{ ist Linearkombination von Elementen aus } M \}$$
$$= \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K,\ v_1, \dots, v_n \in M \}$$

der von M erzeugte Teilraum von V (oder „der von M aufgespannte Teilraum von V" oder „die lineare Hülle von M"). Zusätzlich setzt man $[\emptyset] = \{0\}$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Ist M eine endliche Menge, d.h. $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ für gewisse $v_1, \dots, v_n \in V$, so schreibt man $[v_1, \dots, v_n]$ statt $[\{v_1, \dots, v_n\}]$.

2) Statt $[M]$ werden auch andere Notationen verwendet, z.B. $\langle M \rangle$ oder $\operatorname{span} M$.

Satz 22 Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$. Dann ist $[M]$ ein Teilraum von V.

Beweis: Es sei zunächst $M \neq \emptyset$. Sind $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m \in [M]$ (mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$ und $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in M$), so ist auch

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m) = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m \in [M]$$

und

$$\alpha(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = (\alpha\alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha\alpha_n) v_n \in [M] \quad (\text{für } \alpha \in K \text{ beliebig}).$$

Die Behauptung folgt aus Satz 20. Ist $M = \emptyset$, so ist $[M] = \{0\}$ nach Definition ein Teilraum.

Bemerkungen: 1) Man kann beweisen, dass $[M] = \bigcap_{\substack{M \subseteq W \\ W \text{ ist Teilraum}}} W$, d.h. $[M]$ ist der Durchschnitt aller Teilräume W, die M enthalten (d.h. $M \subseteq W$ erfüllen).

2) $[M]$ ist der kleinste Teilraum von V, der M enthält.

Korollar 23 Es sei V ein K-Vektorraum und M, M_1 und M_2 nichtleere Teilmengen von V.

(i) M ist genau dann Teilraum von V wenn $[M] = M$,

(ii) $[[M]] = [M]$,

(iii) Aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $[M_1] \subseteq [M_2]$.

Beweis: (i) Ist $v \in M$, so ist $v = 1 \cdot v \in [M]$. Also ist $M \subseteq [M]$.

Ist M Teilraum, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in M$, so ist $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in M$.

Also ist auch $[M] \subseteq M$. Die Umkehrung folgt daraus, dass $[M]$ Teilraum ist.

(ii) Folgt sofort daraus, dass $[M]$ Teilraum von V ist und aus (i).

(iii) Offenbar ist $M_1 \subseteq M_2 \subseteq [M_2]$, d.h. $[M_2]$ ist ein Teilraum von V, der M_1 enthält. Sind nun $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in M_1$, so ist $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in [M_2]$, also ist $[M_1] \subseteq [M_2]$.

Beispiele: 1) Es sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann ist $[v] = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ der von v erzeugte Teilraum von v. (Das folgt unmittelbar aus der Definition.)

13.10.2021

2) Es seien $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$. Wir behaupten, dass

$$[v, w] = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + y - 6z = 0 \right\}.$$

Nach Definition ist $[v,w] = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}s+2t\\3s\\s+t\end{pmatrix} \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R} \right\}$.

Ist also $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in [v,w]$, so $\exists s,t\in\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}s+2t\\3s\\s+t\end{pmatrix}$ und daher

$3x+y-6z = 3(s+2t)+3s-6(s+t) = 0$, d.h. $[v,w] \subseteq \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x+y-6z=0 \right\}$

Es sei nun umgekehrt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ mit $3x+y-6z=0$. Setze $s := \frac{1}{3}y$ und $t = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y$.

Dann ist

$$s\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}y\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y\right)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y/3\\y\\y/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x-y/3\\0\\x/2-y/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\x/2+y/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}.$$

D.h. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in[v,w]$ und es gilt auch $\left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x+y-6z=0 \right\} \subseteq [v,w]$.

3) Für $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ bezeichne p_n die Funktion $p_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p_n(x)=x^n$. Dann ist $P_n(\mathbb{R}) = [p_0,p_1,\dots,p_n]$. (D.h. jedes Polynom p mit $\operatorname{grad} p\le n$ ist Linearkombination von $1,x,x^2,\dots,x^n$)

4) Es sei $V = \{ f\in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f''(x)+f(x)=0 \;\forall x\in\mathbb{R} \}$. Dann ist $V = [\sin,\cos]$. (D.h. erfüllt $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ die Differentialgleichung $f''+f=0$, so gibt es $a,b\in\mathbb{R}$ derart dass $f(x) = a\cdot\sin x + b\cdot\cos x$ $\forall x\in\mathbb{R}$.) Es ist offensichtlich, dass $[\sin,\cos]\subseteq V$ (da $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$ und $\frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x$). Die umgekehrte Inklusion wird in der Analysis gezeigt.

<u>Bemerkung</u>: Ist V ein K-Vektorraum und sind U,W zwei Teilräume von V, so ist $U\cup W$ im allgemeinen <u>kein</u> Teilraum von V. Es sei z.B. $V=\mathbb{R}^2$,

$U = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y=0 \right\} = \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$ und $W = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x=0 \right\} = \left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$.

Wäre $U\cup W$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$, so wäre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in U\cup W$, was offensichtlich falsch ist.