1.4 Basen

Definition: Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ paarweise verschieden. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ heißen linear abhängig (kurz l.a.) über K, wenn es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gibt, die nicht alle $= 0$ sind, derart dass $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$. Gibt es derartige $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ nicht, so heißen $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig (kurz l.u.) über K.

Es sei $M \subseteq V$. Dann heißt M l.u. über K, wenn jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist. bzw. M ist linear abhängig, wenn es eine endliche Teilmenge von Vektoren gibt, die l.a. ist.

Bemerkungen: 1) Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ sind genau dann l.u. über K wenn aus $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$ (mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$) folgt, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Um zu zeigen, dass Vektoren l.u. sind, überprüft man normalerweise diese Bedingung.

2) Die leere Menge $\emptyset$ gilt als l.u., da sie die Bedingung leer erfüllt.

3) Beachten Sie, dass die Definition auch für unendliche Mengen M von Vektoren gilt.

Lemma 24 Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.

(i) Ist $\sigma \in M$, so ist M l.a.,

(ii) Ist M l.a. und $M \subseteq N \subseteq V$, so ist auch N l.a.,

(iii) Ist M l.u. und $N \subseteq M$, so ist auch N l.u.,

(iv) Ist $v \in V$, so gilt: v ist l.u. $\Leftrightarrow v \neq \sigma$.

Beweis: (i) Folgt aus $1 \cdot \sigma = \sigma$ (und $1 \neq 0$).

(ii) Da M l.a. ist, gibt es $v_1, \dots, v_n \in M$, die l.a. sind. Daher sind auch $v_1, \dots, v_n \in N$ l.a. und N ist daher l.a.

(iii) Sind $v_1, \dots, v_n \in N$, so ist auch $v_1, \dots, v_n \in M$. Nach Voraussetzung sind $v_1, \dots, v_n$ l.u. Also ist N l.u.

(iv) ($\Rightarrow$) Ist $v = \sigma$, so ist v l.a. nach (i).

($\Leftarrow$) Ist $v \neq \sigma$ und $\alpha \cdot v = \sigma$, so muss wegen Lemma 19 (iii) $\alpha = 0$ gelten.

Beispiele: 1) $\binom{1}{0}, \binom{0}{1} \in \mathbb{R}^2$ sind l.u. (über $\mathbb{R}$), da aus $\alpha \binom{1}{0} + \beta \binom{0}{1} = \binom{0}{0}$ folgt, dass $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{0}{0}$ und daher $\alpha = \beta = 0$.

2) $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind l.u. über $\mathbb{R}$, da $\alpha\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix}2\alpha-\beta=0\\3\alpha\quad\;=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=0$

3) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \in K^n$ sind l.u. über K (wobei K einen Körper bezeichnet), denn

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\dots+\alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_{n-1}\\\alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0.$$

4) Die beiden Funktionen $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R})$ sind l.u. über $\mathbb{R}$, denn, angenommen es sei $\alpha\sin x+\beta\cos x=0 \;\forall x\in\mathbb{R}$. Setzt man $x=0$ (bzw. $x=\frac{\pi}{2}$), so folgt $\beta=0$ (bzw. $\alpha=0$)

5) Für jedes $x\in\mathbb{R}$ sind die beiden Zahlen $\sin x, \cos x\in\mathbb{R}$ l.a. über $\mathbb{R}$, denn: Setzt man $\alpha(x)=\cos x$ und $\beta(x)=-\sin x$, so ist

$$\alpha(x)\cdot\sin x+\beta(x)\cdot\cos x=\cos x\cdot\sin x-\sin x\cdot\cos x=0.$$

Dabei ist $\alpha(x)=\beta(x)=0$ unmöglich, da die Funktionen Sinus und Cosinus keine gemeinsame Nullstelle besitzen. (Das widerspricht dem vorangegangenen Beispiel nicht, da $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ von x abhängen.)

6) Es bezeichne $p_0, p_1, p_2 \in P_2(\mathbb{R})$ die Polynome $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$ und $p_2(x)=x^2$ für $x\in\mathbb{R}$. Dann sind p_0, p_1, p_2 l.u. über $\mathbb{R}$.

Angenommen, $\alpha_0p_0(x)+\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x)=0 \;\forall x\in\mathbb{R}$, d.h. $\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2=0\;\forall x\in\mathbb{R}$.

1. Methode: Setze $x=0,1,-1$. Dann $\alpha_0=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$

2. Methode: Durch differenzieren erhält man $\alpha_1+2\alpha_2x=0\;\forall x\in\mathbb{R}$ und $2\alpha_2=0$.
Es folgt $\alpha_2=0 \Rightarrow \alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_0=0$.

18.10.2021

7) Allgemeiner sind $p_0, p_1, \dots, p_n\in P_n(\mathbb{R})$ l.u. über $\mathbb{R}$, wobei $p_i(x)=x^i$ für $x\in\mathbb{R}, i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

8) $\{p_n \mid n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}\subseteq P(\mathbb{R})$ ist l.u. über $\mathbb{R}$ (wobei p_n die selbe Bedeutung haben soll wie in den letzten beiden Beispielen).

<u>Lemma 25</u> Es sei V ein K-Vektorraum und $M\subseteq V$, $M\neq\emptyset$. Dann sind äquivalent:

(i) M ist l.a.,

(ii) $\exists v\in M$, das sich als Linearkombination von (anderen) Elementen von M schreiben lässt, d.h. $\exists v_1,\dots,v_n\in M\setminus\{v\}\;\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K: v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$

<u>Beweis:</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Da M l.a. ist, folgt:
$\exists v_1,\dots,v_n\in M\;\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ (nicht alle $=0$): $\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n=0$.
Da $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$ nicht alle $=0$ sind, folgt: $\exists j\in\{1,\dots,n\}: \alpha_j\neq0$

$\Rightarrow \alpha_j^{-1}\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_j^{-1}\alpha_{j-1}v_{j-1} + v_j + \alpha_j^{-1}\alpha_{j+1}v_{j+1} + \cdots + \alpha_j^{-1}\alpha_n v_n$

$= \alpha_j^{-1}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1}v_{j-1} + \alpha_j v_j + \alpha_{j+1}v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_j^{-1}\cdot\sigma = \sigma$

$\Rightarrow v_j = (-\alpha_j^{-1}\alpha_1)v_1 + \cdots + (-\alpha_j^{-1}\alpha_{j-1})v_{j-1} + (-\alpha_j^{-1}\alpha_{j+1})v_{j+1} + \cdots + (-\alpha_j^{-1}\alpha_n)v_n$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Aus $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ folgt sofort $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + (-1)v = \sigma$.
Da $-1 \neq 0$ sind $v_1, \ldots, v_n, v$ l.a. und daher ist M l.a.

<u>Definition</u> Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subseteq V$.

1) M heißt Erzeugendensystem (von V) wenn $[M] = V$ (d.h. jeder Vektor $v \in V$ lässt sich als Linearkombination endlich vieler Vektoren aus M schreiben),

2) M heißt Basis von V, wenn M l.u. (über K) ist und $[M] = V$,

3) M heißt minimales Erzeugendensystem von V, wenn $[M] = V$ und jede echte Teilmenge von M kein Erzeugendensystem von V ist (d.h. ist $N \subsetneq M$, so ist $[N] \subsetneq V$),

4) M heißt maximale l.u. Teilmenge von V, wenn M l.u. ist und jede echte Obermenge von M l.a. ist (d.h. ist $M \subsetneq N \subseteq V$, so ist N l.a.).

<u>Satz 26</u> Es sei $V (\neq \{\sigma\})$ ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$. Dann sind äquivalent:

(i) B ist Basis von V,

(ii) B ist minimales Erzeugendensystem von V,

(iii) B ist maximal l.u. Teilmenge von V,

(iv) Jeder Vektor aus V lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombination von Vektoren aus B darstellen

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Laut Definition ist $[B] = V$, also ist B Erzeugendensystem von V. Wäre B kein minimales Erzeugendensystem, so würde $\exists M \subsetneq B : [M] = V$. Dann würde ein $v \in B \setminus M$ existieren. Da $[M] = V$ wäre $v \in [M]$ und daher

$\exists v_1, \ldots, v_n \in M\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$

Da $v, v_1, \ldots, v_n \in B$ wäre, folgt aus Lemma 25, dass B l.a. ist, ein Widerspruch

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wir zeigen zunächst, dass B l.u. ist. Wäre B l.a., so würde es nach Lemma 25 $v, v_1, \ldots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ geben, derart dass $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Dann würde $B \setminus \{v\}$ aber ebenfalls V erzeugen (d.h. $[B \setminus \{v\}] = V$) und B wäre kein minimales Erzeugendensystem, Wid. Zu zeigen bleibt, dass B <u>maximale</u> l.u. Teilmenge von V ist.
Ist $B \subsetneq M \subseteq V$, so $\exists v \in M \setminus B$. Aus $[B] = V$ folgt, dass

$\exists v_1, \ldots, v_n \in B\ \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K : v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.

Da $v_1, \ldots, v_n, v \in M$, folgt aus Lemma 25, dass M l.a. ist.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Wir zeigen zunächst, dass jedes $v \in V$ Linearkombination von Elementen aus B ist (d.h. $[B] = V$). Wäre $[B] \subsetneq V$, so würde es ein $v \in V \setminus [B]$ geben. Dann wäre $B \cup \{v\}$ l.u. (Sind $v_1, \dots, v_n \in B$, so folgt aus $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = o$, dass $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ ist, da B l.u. ist. Es sei nun $\alpha \cdot v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = o$ (mit $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$). Wäre $\alpha \neq 0$, so wäre $v = (-\alpha^{-1}\alpha_1) v_1 + \dots + (-\alpha^{-1}\alpha_n) v_n \in [B]$, ein Widerspruch. Also ist $\alpha = 0$ und daher auch $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.) D.h. B wäre keine maximale l.u. Teilmenge von V, ein Widerspruch.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der Darstellung. Angenommen, es ist

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ für ein $v \in V$ und gewisse $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$. (Sollte ein v_i nur in einer der beiden Darstellungen auftreten, so ergänzt man $0 \cdot v_i$ in der anderen.) Dann folgt $(\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) v_n = o$ und daraus $\alpha_1 - \beta_1 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$ (da B l.u. ist). Also ist $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$ und die Darstellung eindeutig.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Da sich jeder Vektor aus V als Linearkombination von Elementen aus B darstellen lässt, gilt $[B] = V$. Wäre B l.a., so würde es nach Lemma 25 $v \in B$, $v_1, \dots, v_n \in B \setminus \{v\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit der Eigenschaft $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ geben. Dann würde v aber zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination von Elementen von B besitzen (nämlich $v = 1 \cdot v$ und $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$), ein Widerspruch.

<u>Beispiele</u>: 1) $\emptyset$ ist Basis von $\{o\}$.

2) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ (l.u. wurde auf Seite 25 gezeigt und

$\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathbb{R}^2$ folgt aus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$)

3) $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ist Basis des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ (l.u. wurde auf Seite 26 gezeigt und

$\left[\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right] = \mathbb{R}^2$ folgt aus $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{y}{3}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \left(-x + \frac{2y}{3}\right)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$)

<u>Bemerkung</u>: Bsp. 3) zeigt, dass Basen normalerweise nicht eindeutig bestimmt sind.

<u>Beispiele (Fortsetzung)</u>: 4) Für $1 \leq i \leq n$ sei $e_i = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0)^T$, wobei 1 die Eintragung an der i-ten Stelle sein soll. Dann ist $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis des Vektorraums K^n über K. (l.u. wurde auf Seite 26 gezeigt und $[e_1, \dots, e_n] = K^n$, da

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \forall \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in K^n$$

<u>Definition</u>: Die eben beschriebene Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ des Vektorraums K^n über K wird Standardbasis des K^n genannt.

Beispiele (Fortsetzung): 5) $\{\sin, \cos\}$ ist Basis des reellen Vektorraums $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$.

6) Für $n \geq 0$ sei $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p_n(x) = x^n$. Dann ist $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ Basis des reellen Vektorraums $P_n(\mathbb{R})$.

7) Mit der selben Notation wie im vorangegangenen Beispiel ist $\{p_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ Basis des reellen Vektorraums $P(\mathbb{R})$.

Satz 27 Es sei $V (\neq \{0\})$ ein K-Vektorraum. Wird V von endlich vielen Vektoren $v_1, \dots, v_n$ erzeugt (d.h. $[v_1, \dots, v_n] = V$), so besitzt V eine endliche Basis.

Beweis: Falls $\exists i \in \{1, \dots, n\} : v_i = 0$, so wird V auch von $\{v_i \mid 1 \leq i \leq n, v_i \neq 0\}$ erzeugt, d.h. man kann alle v_i mit der Eigenschaft $v_i = 0$ weglassen. Wir können darum oBdA sofort $0 \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ voraussetzen.

Es sei nun $B_1 = \{v_1\}$. Ist $v_2 \in [B_1]$, so sei $B_2 = B_1$. Ist $v_2 \notin [B_1]$, so sei $B_2 = B_1 \cup \{v_2\} = \{v_1, v_2\}$.

Verfahre weiter so. Für ein i mit $1 \leq i < n$ sei B_i schon definiert. Ist $v_{i+1} \in [B_i]$, so sei $B_{i+1} = B_i$. Ist $v_{i+1} \notin [B_i]$, so sei $B_{i+1} := B_i \cup \{v_{i+1}\}$.

Wir behaupten nun: Für $1 \leq i \leq n$ ist $[B_i] = [v_1, \dots, v_i]$ und B_i ist l.u.

Beweis durch Induktion:

$[B_1] = [v_1]$ nach Definition und B_1 ist l.u., da $v_1 \neq 0$ (wegen Lemma 24 (iv)).

Angenommen, die Behauptung ist für ein i mit $1 \leq i < n$ schon bewiesen.

Ist $v_{i+1} \in [B_i] = [v_1, \dots, v_i]$, so $[B_{i+1}] = [B_i] = [v_1, \dots, v_i] = [v_1, \dots, v_{i+1}]$ und B_{i+1} ist l.u., da B_i l.u. ist.

Ist $v_{i+1} \notin [B_i]$, so $[B_{i+1}] = [B_i \cup \{v_{i+1}\}] = [\{v_1, \dots, v_i\} \cup \{v_{i+1}\}] = [v_1, \dots, v_{i+1}]$. Angenommen, B_{i+1} wäre l.a. Dann gäbe es $w_1, \dots, w_k \in B_{i+1}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$ (nicht alle $= 0$), derart dass $\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k = 0$. Wäre dabei $v_{i+1} \notin \{w_1, \dots, w_k\}$ oder $v_{i+1} = w_j$ und $\alpha_j = 0$, so wäre B_i l.a., ein Widerspruch. Also muss $v_{i+1} \in \{w_1, \dots, w_k\}$ gelten. Ist $v_{i+1} = w_j$ und $\alpha_j \neq 0$, so folgt $v_{i+1} = w_j = -\sum_{\substack{1 \leq \ell \leq k \\ \ell \neq j}} \alpha_j^{-1} \alpha_\ell w_\ell \in [B_i]$, ein Widerspruch.

Da $[B_n] = [v_1, \dots, v_n] = V$ und B_n l.u. ist, ist B_n Basis von V.

Bemerkung: Tatsächlich gilt die folgende, wesentlich stärkere Version von Satz 27: jeder Vektorraum besitzt eine Basis. Der Beweis verwendet entscheidend das Auswahlaxiom und ist darum nicht konstruktiv.

Korollar 28 Es sei V ein K-Vektorraum, $v_1, \dots, v_k \in V$ l.u. und V möge ein endliches Erzeugendensystem besitzen. Dann gibt es eine endliche Basis B von V mit der Eigenschaft $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq B$. (D.h. jede linear unabhängige Teilmenge von V kann zu einer Basis von V erweitert werden.)

Beweis: Es sei $v_{k+1},\dots,v_n$ ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann gilt auch $[v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n]=V$. Für $v_1,\dots,v_n$ gehen wir nun den Beweis von Satz 27 durch. Da $v_1,\dots,v_k$ l.u. sind, gilt $v_i\neq o$ für $1\le i\le k$ und $v_{i+1}\notin[v_1,\dots,v_i]$ für $1\le i<k$. Nach k Schritten erhält man daraus $B_k=\{v_1,\dots,v_k\}$. Verfährt man weiter wie im Beweis von Satz 27, so erhält man eine Basis B mit der Eigenschaft $\{v_1,\dots,v_k\}=B_k\subseteq B$.

Lemma 29 Es sei V ein K-Vektorraum und $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V. Wenn für ein $v\in V$ in der Darstellung $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$ (mit $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K$) der Skalar α_k die Bedingung $\alpha_k\neq 0$ erfüllt, dann ist auch $C:=\{v_1,\dots,v_{k-1},v,v_{k+1},\dots,v_n\}$ eine Basis von V.

Beweis: Klarerweise ist $C\subseteq V=[B]$ und daher $[C]\subseteq[[B]]=[B]$ nach Korollar 23.

Aus $v=\sum_{i=1}^n\alpha_iv_i=\alpha_kv_k+\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq k}}\alpha_iv_i$ folgt $v_k=\alpha_k^{-1}v-\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\neq k}}\alpha_k^{-1}\alpha_iv_i\in[C]$

Da trivialerweise $v_1,\dots,v_{k-1},v_{k+1},\dots,v_n\in[C]$, ist $B\subseteq[C]$ und daher $[B]\subseteq[[C]]=[C]$. Also ist $[C]=[B]=V$. Zu zeigen bleibt, dass C l.u. ist. Es sei

$$\begin{aligned}o&=\beta v+\beta_1v_1+\dots+\beta_{k-1}v_{k-1}+\beta_{k+1}v_{k+1}+\dots+\beta_nv_n\\&=\beta(\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n)+\beta_1v_1+\dots+\beta_{k-1}v_{k-1}+\beta_{k+1}v_{k+1}+\dots+\beta_nv_n\\&=(\beta\alpha_1+\beta_1)v_1+\dots+(\beta\alpha_{k-1}+\beta_{k-1})v_{k-1}+\beta\alpha_kv_k+(\beta\alpha_{k+1}+\beta_{k+1})v_{k+1}+\dots+(\beta\alpha_n+\beta_n)v_n\end{aligned}$$

für gewisse $\beta,\beta_1,\dots,\beta_{k-1},\beta_{k+1},\dots,\beta_n\in K$. Da $v_1,\dots,v_n$ l.u. sind, folgt

$$\beta\alpha_1+\beta_1=\dots=\beta\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}=\beta\alpha_k=\beta\alpha_{k+1}+\beta_{k+1}=\dots=\beta\alpha_n+\beta_n=0.$$

Da $\alpha_k\neq 0$ ist, erhält man $\beta=0$ und daher auch $\beta_1=\dots=\beta_{k-1}=\beta_{k+1}=\dots=\beta_n=0$.

Satz 30 (Austauschsatz von Steinitz) Es sei $V(\neq\{o\})$ ein K-Vektorraum und $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V. Weiters seien $w_1,\dots,w_k\in V$ l.u. Dann gelten:

(i) $k\le n$,

(ii) Nach einer geeigneten Umnummerierung der Vektoren $v_1,\dots,v_n$ ist die Menge $B'=\{w_1,\dots,w_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ ebenfalls eine Basis von V. (D.h. wenn man k geeignete Vektoren aus B durch $w_1,\dots,w_k$ ersetzt, erhält man wieder eine Basis von V.)

Beweis: Induktion nach k. $k=1$: Wäre $B=\emptyset$, so wäre $V=\{o\}$, was wir ausgeschlossen haben. Also ist $n\ge 1=k$. Da B eine Basis ist, $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in K: w_1=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n$. Wäre dabei $\alpha_1=\dots=\alpha_n=0$, so wäre $w_1=o$ und l.a. Also $\exists j\in\{1,\dots,n\}:\alpha_j\neq 0$ und (ii) folgt aus Lemma 29 (wobei wir so umnummerieren, dass $j=1$).

Angenommen, die Behauptung wäre für $k-1$ schon gezeigt. Da (wegen Lemma 24 (iiii)) auch $w_1, \dots, w_{k-1}$ l.u. sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung $k-1 \leq n$ und nach einer geeigneten Umnummerierung ist $C = \{w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n\}$ ebenfalls eine Basis. Wäre $k-1 = n$, so wäre $\{w_1, \dots, w_{k-1}\}$ eine Basis von V. Dann wäre aber $w_k \in [w_1, \dots, w_{k-1}]$ und $w_1, \dots, w_k$ daher l.a., ein Widerspruch. Also ist $k-1 < n$ und daher $k \leq n$.

Da C eine Basis ist, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$: $w_k = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{k-1} w_{k-1} + \alpha_k v_k + \dots + \alpha_n v_n$.

Wäre dabei $\alpha_k = \dots = \alpha_n = 0$, so wäre wieder $w_k \in [w_1, \dots, w_{k-1}]$ und $w_1, \dots, w_k$ l.a., Widerspruch. Also muss einer der Skalare $\alpha_k, \dots, \alpha_n$ von 0 verschieden sein. Nach eventuellem Umnummerieren kann man o.B.d.A. $\alpha_k \neq 0$ annehmen. Teil (ii) folgt nun durch nochmalige Anwendung von Lemma 29.

<u>Korollar 31</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Besitzt V eine endliche Basis, so ist jede andere Basis von V ebenfalls endlich und besitzt die gleiche Anzahl von Elementen.

<u>Beweis:</u> Ist $V = \{0\}$, so ist nur $\emptyset$ Basis von V. Wir können ab sofort $V \neq \{0\}$ voraussetzen. Es sei nun $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und C ebenfalls eine Basis von V. Ist $\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq C$, so sind $w_1, \dots, w_k$ l.u. (wegen Lemma 24 (iii)) und $k \leq n$ nach Satz 30. Also ist C endlich und $|C| \leq n = |B|$. Aus Symmetriegründen gilt auch $|B| \leq |C|$ und daher $|B| = |C|$.

<u>Definition</u> Es sei V ein K-Vektorraum. Besitzt V eine endliche Basis, so bezeichnet man die Anzahl der Elemente dieser (und damit jeder) Basis als die Dimension von V (über K) und schreibt dafür $\dim_K V$.

<u>Beispiele:</u> 1) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis ist.

2) Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist $\dim_K K^n = n$, da $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis ist.

3) Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist $\dim_K M_{m,n}(K) = m \cdot n$.

Um eine Basis für $M_{m,n}(K)$ anzugeben, definieren wir für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ die Matrix E_{ij} folgendermaßen: Ist $E_{ij} = (\varepsilon_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}}$, so sei $\varepsilon_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k,l) = (i,j) \text{ ist} \\ 0 & \text{falls } (k,l) \neq (i,j) \text{ ist} \end{cases}$

Die E_{ij} hat in der i-ten Zeile und j-ten Spalte als Eintragung $1 (\in K)$ und sonst überall die Eintragungen $0 (\in K)$. Für $m = n = 2$ ist also z.B.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir behaupten nun, dass $B := \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ eine Basis von $M_{m,n}(K)$ ist.

Ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_{m,n}(K)$, so ist $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$ und daher $M_{m,n}(K) = [B]$.

Zu zeigen bleibt, dass B l.u. ist. Ist $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = 0$ für gewisse $\alpha_{ij} \in K$ mit $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ (wobei 0 auf der rechten Seite die Nullmatrix in $M_{m,n}(K)$ bezeichnet), so ist $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ und daher $\alpha_{ij} = 0$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$.

4) $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{R}) = n+1$, da $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ Basis ist (aber $P(\mathbb{R})$ ist ein unendlich-dimensionaler reeller Vektorraum, da seine Basis $\{p_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ unendlich viele paarweise verschiedene Elemente enthält).

5) $\dim_{\mathbb{R}} \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\} = 2$, da $\{\sin, \cos\}$ Basis ist

6) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$, da $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ Basis von $\mathbb{C}^2$ <u>über $\mathbb{R}$</u> ist.

Ist $\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ (mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$), so ist $\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$, d.h. $[B] = \mathbb{C}^2$. Ist $a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit <u>$a,b,c,d \in \mathbb{R}$</u>, so ist $\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also $a+ib = c+id = 0$ und daher $a = b = c = d = 0$.

<u>Bemerkung</u>: Das letzte Beispiel zeigt, dass die Dimension eines Vektorraums vom Körper K abhängt. Nach Bsp. 2) oben ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$, aber – wie wir oben gezeigt haben – ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$. Beachten Sie in diesem Zusammenhang, dass die Menge B aus Bsp. 6) l.a. über $\mathbb{C}$ ist, z.B. da $i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

<u>Korollar 32</u> Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K V = n$.

(i) Ist $B \subseteq V$ l.u., so gilt: B ist Basis von V $\iff |B| = n$,

(ii) Ist W ein Teilraum von V, so ist $\dim_K W \le \dim_K V$ und $\dim_K W = \dim_K V \iff W = V$.

<u>Beweis</u>: (i) ($\Rightarrow$) Ist B Basis von V, so ist $|B| = \dim_K V = n$.

($\Leftarrow$) Es sei nun $|B| = n$. Nach Korollar 28 kann man B zu einer Basis $C (\supseteq B)$ von V ergänzen. Dann ist $n = |B| \le |C| = n$ und daher $|B| = |C|$ und $B = C$ ist Basis.

(ii) Sind $w_1, \dots, w_k \in W$ l.u., so gilt $k \le n$ (wegen Satz 30 (i)). Insbesondere ist jede l.u. Teilmenge von W endlich, woraus folgt, dass W ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Nach Korollar 28 kann eine Basis C von W zu einer Basis $B (\supseteq C)$ von V ergänzt werden. Also ist $\dim_K W = |C| \le |B| = \dim_K V$.

($\Rightarrow$) Ist $\dim_K W = \dim_K V$, so ist $\dim_K W = n$ und eine Basis B von W ist bereit eine Basis von V, woraus $W = [B] = V$ folgt.

($\Leftarrow$) Ist $W = V$, so ist trivialerweise $\dim_K W = \dim_K V$.

Beispiel: Mit Hilfe von Korollar 32 kann man z.B. alle Teilräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bestimmen. Ist $W \subseteq \mathbb{R}^2$ Teilraum von $\mathbb{R}^2$, so ist nach Korollar 32 $\dim_{\mathbb{R}} W \in \{0,1,2\}$ (da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$). Nun gibt es offenbar nur einen einzigen Teilraum W mit $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$, nämlich $W = \{\binom{0}{0}\}$. Ebenso gibt es (nach Korollar 32 (ii)) nur einen einzigen Teilraum W mit $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$, nämlich $W = \mathbb{R}^2$. Zu finden sind also nur die Teilräume W mit $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$. In diesem Fall besitzt W eine Basis $B = \{v\}$, die nur aus einem einzigen Vektor besteht. Daher ist $W = [B] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$, d.h. W ist eine Gerade durch den Ursprung in Richtung des Vektors v. (Dass alle Geraden durch den Ursprung Teilräume von $\mathbb{R}^2$ sind, haben wir uns bereits auf Seite 20 überlegt.)

Völlig analog kann man die Teilräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bestimmen. In diesem Fall muss ein Teilraum W von $\mathbb{R}^3$ die Bedingung $\dim_{\mathbb{R}} W \in \{0,1,2,3\}$ erfüllen und man erhält:

- $\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ falls $\dim_{\mathbb{R}} W = 0$
- Geraden durch den Ursprung, falls $\dim_{\mathbb{R}} W = 1$
- Ebenen, die den Ursprung enthalten, falls $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$
- $\mathbb{R}^3$ falls $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$

Korollar 33 Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $M \subseteq V$, $M \neq \{0\}$. Dann sind äquivalent:

(i) $\dim_K [M] = k$,

(ii) M enthält k l.u. Vektoren und je $k+1$ Elemente von M sind l.a.
(d.h. $k = \max\{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid$ es gibt m l.u. Elemente in $M\}$).

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Jede Basis von $[M]$ besteht aus k l.u. Vektoren. Sind $w_1, \dots, w_m \in [M]$ l.u. so gilt $m \le k$ wegen Satz 30 (i). Ist $m > k$, so sind $w_1, \dots, w_m$ daher l.a.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es seien $v_1, \dots, v_k \in M$ l.u. Ist $w \in M \setminus \{v_1, \dots, v_k\}$, so sind $v_1, \dots, v_k, w$ l.a. Daraus folgt $w \in [v_1, \dots, v_k]$, also $M \subseteq [v_1, \dots, v_k]$ und somit auch $[M] \subseteq [[v_1, \dots, v_k]] = [v_1, \dots, v_k]$. Umgekehrt ist $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq M$ und daher $[v_1, \dots, v_k] \subseteq [M]$. Also ist $[v_1, \dots, v_k] = [M]$ und daher $k = \dim_K [v_1, \dots, v_k] = \dim_K [M]$.