1.5 Der Rang einer Matrix

<u>Definition</u> Es sei $A \in M_{m,n}(K)$ mit Zeilenvektoren $A_1, \dots, A_m$ und Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$, also

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \; \cdots \; a_{1n}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \; \cdots \; a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ \\ \\ A_m \end{matrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A^1 \qquad\quad A^n$$

Der Zeilenrang von A wird durch $\dim_K [A_1, \dots, A_m]$ definiert. (mit $[A_1, \dots, A_m]$ Teilraum von K^n).

Der Spaltenrang von A wird durch $\dim_K [A^1, \dots, A^n]$ definiert (mit $[A^1, \dots, A^n]$ Teilraum von K^m).

<u>Bemerkung:</u> Nach Korollar 33 ist der Zeilenrang von A die maximale Zahl l.u. Zeilenvektoren von A bzw. der Spaltenrang von A ist die maximale Zahl l.u. Spaltenvektoren von A.

<u>Lemma 34</u> Der Zeilenrang einer Matrix A ändert sich nicht, wenn man eine der folgenden „elementaren Umformungen" anwendet:

1) Vertauschen zweier Zeilen,
2) Vertauschen zweier Spalten,
3) Ersetzen eines Zeilenvektors A_i (mit $1 \le i \le m$) durch den Zeilenvektor $B_i := A_i + \alpha A_j$ (mit $\alpha \in K$ und $1 \le j \le m$, $i \ne j$)

<u>Beweis:</u> 1) Folgt sofort daraus, dass sich $[A_1, \dots, A_m]$ und damit $\dim_K [A_1, \dots, A_m]$ nicht ändert, wenn man die Reihenfolge von $A_1, \dots, A_m$ ändert.

2) Vertauschen zweier Spalten entspricht dem Umnummerieren der Indizes in den Vektoren und ändert darum nichts an linearer Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit.

3) Wir zeigen $[A_1, \dots, A_m] = [A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m]$.

Nach Konstruktion ist $B_i \in [A_1, \dots, A_m]$. Also ist $A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m \in [A_1, \dots, A_m]$ und daher $[A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m] \subseteq [A_1, \dots, A_m]$. Umgekehrt folgt aus $A_i = B_i - \alpha A_j \in [A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m]$, dass $A_1, \dots, A_m \in [A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m]$, woraus $[A_1, \dots, A_m] \subseteq [A_1, \dots, A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, \dots, A_m]$ folgt.

20.10.2021

<u>Lemma 35</u> Es sei K ein Körper. Die k Vektoren

$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} \in K^n$ sind genau dann l.a. (bzw. l.u.) wenn die k Vektoren

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1i}+\alpha b_{1j} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{ki}+\alpha b_{kj} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} \in K^n$$ l.a. (bzw. l.u.) sind. (D.h. im l-ten Vektor wurde die i-te Eintragung b_{li} durch $b_{li}+\alpha b_{lj}$ ersetzt, wobei b_{lj} die j-te Eintragung bezeichnet.) Dabei sind $1 \leq i,j \leq n$, $i \neq j$ und $\alpha \in K$.

<u>Beweis</u>: Wenn $\exists \beta_1, \dots, \beta_k \in K$ (nicht alle $=0$), derart dass

$$\beta_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \beta_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$ so ist auch $$\beta_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1i}+\alpha b_{1j} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \beta_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{ki}+\alpha b_{kj} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$ da

$$\beta_1(b_{1i}+\alpha b_{1j}) + \dots + \beta_k(b_{ki}+\alpha b_{kj}) = \underbrace{(\beta_1 b_{1i} + \dots + \beta_k b_{ki})}_{=0} + \alpha \underbrace{(\beta_1 b_{1j} + \dots + \beta_k b_{kj})}_{=0} = 0.$$

Wenn umgekehrt $\exists \beta_1, \dots, \beta_k \in K$ (nicht alle $=0$), derart dass

$$\beta_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1i}+\alpha b_{1j} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \beta_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{ki}+\alpha b_{kj} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = 0,$$ so ist auch $$\beta_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{pmatrix} + \dots + \beta_k \begin{pmatrix} b_{k1} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$ da

$$\beta_1 b_{1i} + \dots + \beta_k b_{ki} = \underbrace{(\beta_1(b_{1i}+\alpha b_{1j}) + \dots + \beta_k(b_{ki}+\alpha b_{kj}))}_{=0} - \alpha \underbrace{(\beta_1 b_{1j} + \dots + \beta_k b_{kj})}_{=0} = 0.$$

(Bei den jeweils anderen Indizes bzw. Zeilen der Rechnung ändert sich nichts.)

<u>Lemma 36</u> Der Spaltenrang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man eine der elementaren Umformungen aus Lemma 34 anwendet.

<u>Beweis</u>: 1) und 2) Analog zum Beweis von Lemma 34.

3) Ob eine Familie von Spaltenvektoren l.a. bzw. l.u. ist, ändert sich nach Lemma 35 durch eine Umformung dieser Gestalt nicht. Insbesondere bleibt die maximale Anzahl l.u. Spaltenvektoren gleich.

<u>Satz 37</u> Es sei $A \in M_{m,n}(K)$. Dann gibt es eine Folge elementarer Umformungen, durch die man, ausgehend von A, auf eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{rr} & * \cdots & * \\ & & & & \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

kommt. Dabei ist $0 \leq r \leq m$, $a_{ii} \neq 0$ für $1 \leq i \leq r$, die $*$ bezeichnen beliebige Elemente von K und alle übrigen Eintragungen sind $0 \ (\in K)$. Es folgt, dass Zeilen- und Spaltenrang von A gleich r sind. Insbesondere stimmen Zeilen- und Spaltenrang jeder Matrix überein.

Beweis: Verwende folgenden Algorithmus:

1) Sind alle Eintragungen von A gleich 0, so ist man fertig und $r=0$,

2) Ansonsten $\exists (i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}: a_{ij} \neq 0$,

Ist $a_{11} \neq 0$, so gehe zu 3), ansonsten wähle $(i,j) \in \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\}$ mit $a_{ij} \neq 0$,

Vertausche die 1. Zeile mit der i-ten Zeile,

Vertausche die 1. Spalte mit der j-ten Spalte,

Danach erhält man eine Matrix mit a_{ij} in der linken oberen Ecke

3) Wir nennen die so erhaltene Matrix $B^{(1)} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$. Wegen 2) ist $b_{11} \neq 0$.

Bezeichnen $B_1,\dots,B_m$ die Zeilen von $B^{(1)}$, so ersetze $B_2,\dots,B_m$ durch $B_2 - b_{21}\cdot b_{11}^{-1} B_1,\dots, B_m - b_{m1}\cdot b_{11}^{-1} B_1$. Danach erhält man eine Matrix der Gestalt

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \quad \text{mit } b_{11} \neq 0.$$

Verfahre weiter so: Angenommen, man hat bereits eine Matrix $A^{(p)} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$ der Gestalt

$$A^{(p)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{pp} & * \cdots & * \\ & 0 & & * \cdots & * \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & * \cdots & * \end{pmatrix}$$

mit $a_{11},\dots,a_{pp} \neq 0$ gefunden. (Wir schreiben wieder a_{ij} für die Eintragungen von $A^{(p)}$, obwohl sie natürlich nicht mit den Eintragungen von A übereinstimmen müssen.)

1) Sind alle Eintragungen im „rechten unteren Rechteck" gleich 0 (d.h. $a_{ij}=0$ für $p<i\le m$, $p<j\le n$), so ist man fertig und $r=p$,

2) Ansonsten $\exists (i,j) \in \{p+1,\dots,m\} \times \{p+1,\dots,n\}: a_{ij} \neq 0$,

Ist $a_{p+1,p+1} \neq 0$, so gehe zu 3), ansonsten wähle $(i,j) \in \{p+1,\dots,m\} \times \{p+1,\dots,n\}$ mit $a_{ij} \neq 0$

Vertausche die (p+1)-te Zeile mit der i-ten Zeile,

Vertausche die (p+1)-te Spalte mit der j-ten Spalte,

Danach erhält man eine Matrix $B^{(p+1)} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$, die die selbe Gestalt wie $A^{(p)}$ hat und $b_{p+1,p+1} \neq 0$ erfüllt. (Auch hier müssen die Eintragungen von $B^{(p+1)}$ natürlich nicht mit denen von $B^{(1)}$ übereinstimmen. Wir verwenden trotzdem wieder die selben Bezeichnungen.)

3) Bezeichnen $B_1,\dots,B_m$ die Zeilen von $B^{(p+1)}$, so ersetze $B_{p+2},\dots,B_m$ durch

$B_{p+2} - b_{p+2,p+1}\cdot b_{p+1,p+1}^{-1}\cdot B_{p+1}, \dots, B_m - b_{m,p+1}\cdot b_{p+1,p+1}^{-1}\cdot B_{p+1}$.

Danach erhält man eine Matrix $A^{(p+1)}$ der Gestalt

$$A^{(p+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & a_{pp} & * & \cdots & * \\ & & & a_{p+1,p+1} & * \cdots & * \\ & 0 & & & * \cdots & * \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & * \cdots & * \end{pmatrix} \text{ mit } a_{11},\dots,a_{p+1,p+1} \neq 0.$$

Der Algorithmus bricht ab, wenn alle nachfolgenden Zeilen nur mehr 0 als Eintragung enthalten (oder die letzte Zeile erreicht wird, in der man eventuell noch zwei Spalten vertauschen muss, d.h. einen Teil von Schritt 2) durchführen muss).
Man erhält also eine Matrix der Gestalt

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & & * \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & a_{rr} & * \cdots & * \\ & 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit $a_{11},\dots,a_{rr} \neq 0$. Wegen Lemmata 34 und 36 besitzt die Matrix $A^{(r)}$ den selben Zeilen- und Spaltenrang wie die Ausgangsmatrix A.
Der Zeilenrang der Matrix $A^{(r)}$ ist r, da die r (Zeilen)Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{22} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{rr} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}^T$$

$(\in K^n)$ l.u. sind und alle weiteren Zeilenvektoren $= 0$ sind.

Der Spaltenrang von $A^{(r)}$ ist mindestens r, da die r (Spalten)Vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ a_{rr} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(\in K^m)$ l.u. sind.

Der Spaltenrang von $A^{(r)}$ ist höchstens r, da alle Spaltenvektoren im r-dimensionalen Teilraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; x_1,\dots,x_r \in K \right\}$$

des K^m enthalten sind.

Bemerkung: In der Praxis kann und soll man den Algorithmus modifizieren, um die Rechnung zu vereinfachen und beschleunigen.

Definition: Es sei $A \in M_{m,n}(K)$. Wir definieren den Rang von A (für den wir rang A schreiben) als den Zeilenrang von A (der nach Satz 37 mit dem Spaltenrang von A übereinstimmt).

Beispiel: Zu bestimmen ist rang A für $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -13 & 23 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = (\text{Vertausche 1. und 2. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & -13 & 23 \\ -1 & -1 & 5 & -9 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Ersetze 2.-4. Zeile durch:} \\ \text{2. Zeile} - 2\times \text{1. Zeile} \\ \text{3. Zeile} + \text{1. Zeile} \\ \text{4. Zeile} - \text{1. Zeile} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 2. Zeile durch 2. Zeile} + 3\times\text{3. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Ersetze 4. Zeile durch 4. Zeile} - \text{3. Zeile}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{Zeilen vertauschen}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (\text{3. und 4. Spalte vertauschen}) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Korollar 38 Es sei $A \in M_{m,n}(K)$. Dann gelten:

(i) $\operatorname{rang} A \le \min\{m,n\}$,

(ii) $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A$,

(iii) Sind $A^1,\dots,A^n$ die Spaltenvektoren von A, so ändert sich der Rang nicht, wenn man A^i durch $A^i + \alpha A^j$ ersetzt (mit $1 \le i,j \le n$, $i \ne j$ und $\alpha \in K$).

Beweis: (i) Da $[A_1,\dots,A_m]$ ein Teilraum von K^n ist (bzw. $[A^1,\dots,A^n]$ ein Teilraum von K^m ist) folgt (wegen Korollar 32 (ii)) $\operatorname{rang} A = \dim_K [A_1,\dots,A_m] \le \dim_K K^n = n$

(bzw. $\operatorname{rang} A = \dim_K [A^1,\dots,A^n] \le \dim_K K^m = m$).

(ii) Folgt wegen Satz 37 daraus, dass die Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) von A^T gerade die Spaltenvektoren (bzw. Zeilenvektoren) von A sind.

(iii) Folgt aus (ii) und Lemma 34.

Satz 39 Es seien $A \in M_{m,n}(K)$ und $B \in M_{n,p}(K)$. Dann gelten:

(i) $\operatorname{rang}(A\cdot B) \le \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}$,

(ii) Ist $p=n$ und B invertierbar, so ist $\operatorname{rang}(A\cdot B) = \operatorname{rang}(A)$,

(iii) Ist $m=n$ und A invertierbar, so ist $\operatorname{rang}(A\cdot B) = \operatorname{rang}(B)$,

(iv) Ist $m=n$, so gilt: A ist invertierbar $\iff \operatorname{rang} A = n$.

Beweis: (i) Bezeichnet $B^1,\dots,B^p$ die Spaltenvektoren von B, so sind die Spaltenvektoren von $A\cdot B$ gerade $A\cdot B^1,\dots,A\cdot B^p$. Sind $A^1,\dots,A^n$ die Spaltenvektoren von A und $B = (b_{kl})_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le l\le p}}$, so ist $A\cdot B^i = b_{1i}\cdot A^1 + b_{2i}A^2 + \dots + b_{ni}\cdot A^n \in [A^1,\dots,A^n]$ für $1 \le i \le p$.

Daher ist $[A\cdot B^1,\dots,A\cdot B^p]$ Teilraum von $[A^1,\dots,A^n]$ und somit (wegen Korollar 32 (ii))

$$\operatorname{rang}(A\cdot B) = \dim_K [A\cdot B^1,\dots,A\cdot B^p] \le \dim_K [A^1,\dots,A^n] = \operatorname{rang} A$$

sowie (wegen Korollar 38 (ii) und Satz 17)

$$\operatorname{rang}(A\cdot B) = \operatorname{rang}((A\cdot B)^T) = \operatorname{rang}(B^T\cdot A^T) \le \operatorname{rang} B^T = \operatorname{rang} B.$$

(ii) Aus (i) folgen $\operatorname{rang}(A\cdot B) \le \operatorname{rang} A$ und $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}((A\cdot B)\cdot B^{-1}) \le \operatorname{rang}(A\cdot B)$

(iii) Wegen Korollar 18 ist auch A^T invertierbar und daher

$$\operatorname{rang}(A\cdot B) = \operatorname{rang}((A\cdot B)^T) = \operatorname{rang}(B^T\cdot A^T) \overset{(ii)}{=} \operatorname{rang} B^T = \operatorname{rang} B.$$

(iv) ($\Longrightarrow$) Ist A invertierbar, so folgt $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\cdot I_n) = \operatorname{rang} I_n = n$.

($\Longleftarrow$) Dass $\operatorname{rang} A = n$ ist, besagt gerade $\dim_K [A^1,\dots,A^n] = n$ und daher (wegen Korollar 32(ii)) $[A^1, \ldots, A^n] = K^n$. Bezeichnen $E^1, \ldots, E^n$ die Spaltenvektoren der Einheitsmatrix I_n (d.h. die Vektoren der Standardbasis, die wir normalerweise mit $e_1, \ldots, e_n$ bezeichnen), so gilt $E^1, \ldots, E^n \in [A^1, \ldots, A^n]$. Daraus folgt:

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \; \exists b_{1j}, \ldots, b_{nj} \in K : E^j = b_{1j} A^1 + \ldots + b_{nj} A^n.$$

Setzt man nun $B := (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$, so gilt nach Konstruktion $A \cdot B = I_n$.

Ebenso $\exists C \in M_n(K) : C \cdot A = I_n$. Da $\operatorname{rang} A^T = \operatorname{rang} A = n$, folgt aus dem bisher gezeigten: $\exists B' \in M_n(K) : A^T \cdot B' = I_n$. Daraus erhält man

$$(B')^T \cdot A = (B')^T \cdot (A^T)^T = (A^T \cdot B')^T = I_n^T = I_n$$ und setzt $C := (B')^T$.

Da $C = C \cdot I_n = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I_n \cdot B = B$, ist $A^{-1} = B = C$ und A ist invertierbar.