1.6 Determinanten

Satz 40 Für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ sei $S_n = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \sigma \text{ ist bijektiv}\}$. Dann ist $(S_n, \circ)$ eine Gruppe (wobei $\circ$ das übliche Verknüpfen von Funktionen bezeichnet) mit $|S_n| = n!$ Elementen.
Diese Gruppe ist abelsch wenn $n \in \{1,2\}$ und nicht abelsch für $n \geq 3$.

Beweis: Abgeschlossenheit gilt, da die Verknüpfung $\tau\circ\sigma$ zweier bijektiver Abbildungen $\sigma,\tau\in S_n$ wieder bijektiv ist. Assoziativität gilt für die Verknüpfung von Funktionen ganz allgemein. Neutrales Element ist $\varepsilon:\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$, $\varepsilon(a)=a$ für $1\le a\le n$. Ist $\sigma\in S_n$, so ist auch σ^{-1} bijektiv und daher in S_n. Da die Elemente von S_n den möglichen Anordnungen der n Zahlen $1,2,3,\dots,n$ entsprechen gibt es davon $n!$ Stück und $|S_n|=n!$.
Für $n=1$ ist $S_1=\{\varepsilon\}$ (mit $\varepsilon(1)=1$) trivialerweise abelsch.
Für $n=2$ ist $S_2=\{\varepsilon,\tau\}$ (mit $\varepsilon(1)=1$, $\varepsilon(2)=2$, $\tau(1)=2$, $\tau(2)=1$) und wegen $\varepsilon\circ\varepsilon=\tau\circ\tau=\varepsilon$ und $\varepsilon\circ\tau=\tau\circ\varepsilon=\tau$ ist auch S_2 abelsch.
Für $n\geq 3$ betrachte $\sigma,\tau\in S_n$ mit $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=1$ und $\sigma(a)=a$ für $a\notin\{1,2\}$ sowie $\tau(1)=3$, $\tau(3)=1$ und $\tau(a)=a$ für $a\notin\{1,3\}$. Dann ist $(\tau\circ\sigma)(1)=\tau(2)=2$ und $(\sigma\circ\tau)(1)=\sigma(3)=3$.

Definition Die Gruppe $(S_n,\circ)$ wird symmetrische Gruppe genannt.

Definition Ein $\zeta\in S_n$ heißt Zyklus (oder genauer k-Zyklus) wenn es (paarweise verschiedene) $a_1,\dots,a_k\in\{1,\dots,n\}$ gibt, derart dass $\zeta(a_i)=a_{i+1}$ für $1\le i<k$ und $\zeta(a_k)=a_1$ sowie $\zeta(b)=b$ für $b\in\{1,\dots,n\}\setminus\{a_1,\dots,a_k\}$. Man schreibt dafür $\zeta=(a_1\,a_2\dots a_k)$.

Definition Ein $\tau\in S_n$ heißt Transposition, wenn τ ein 2-Zyklus ist. (D.h. es gibt (verschiedene) $a,b\in\{1,\dots,n\}$, derart dass $\tau(a)=b$, $\tau(b)=a$ und $\tau(c)=c$ für $c\notin\{a,b\}$.) Man schreibt dafür $\tau=(a\,b)$.

Lemma 41 Sind der k-Zyklus $\sigma=(a_1\dots a_k)$ und der l-Zyklus $\tau=(b_1\dots b_l)$ (mit $\sigma,\tau\in S_n$) elementfremd (d.h. $\{a_1,\dots,a_k\}\cap\{b_1,\dots,b_l\}=\emptyset$), so ist $\sigma\circ\tau=\tau\circ\sigma$.

Beweis: Es gelten $(\sigma\circ\tau)(a_i)=(\tau\circ\sigma)(a_i)=\sigma(a_i)$ für $1\le i\le k$,
$(\sigma\circ\tau)(b_i)=(\tau\circ\sigma)(b_i)=\tau(b_i)$ für $1\le i\le l$ und $(\sigma\circ\tau)(c)=(\tau\circ\sigma)(c)=c$ falls $c\notin\{a_1,\dots,a_k\}\cup\{b_1,\dots,b_l\}$.

Satz 42 Jedes $\sigma\in S_n$ kann als Verknüpfung von paarweise elementfremden Zyklen geschrieben werden.

Beweis: Falls $\sigma=\varepsilon$ ist σ eine Verknüpfung von lauter 1-Zyklen.
Falls $\sigma\neq\varepsilon$ wähle das kleinste $a_1\in\{1,\dots,n\}$ mit der Eigenschaft $\sigma(a_1)\neq a_1$.
Betrachte die Folge $a_2=\sigma(a_1)$, $a_3=\sigma(a_2)$, ... Da $\{1,\dots,n\}$ eine endliche Menge ist, muss dabei irgendwann ein Element auftauchen, das schon da war. Es sei a_k das erste solche Element. Dann ist $\sigma(a_k)\in\{a_1,\dots,a_k\}$. Da σ injektiv ist, muss $\sigma(a_k)=a_1$ gelten. Wir können nun $\sigma=(a_1\dots a_k)\circ\tau$ schreiben, wobei τ die

Eigenschaften hat, dass $\tau(a_i)=a_i$ für $1\le i\le k$ und $\tau(c)=\sigma(c)$ für $c\notin\{a_1,\dots,a_k\}$. Verfahre weiter so bis alle Elemente von $\{1,\dots,n\}$, die durch σ nicht auf sich selbst abgebildet werden, erfasst sind.

<u>Korollar 43</u> Jedes $\sigma\in S_n$ kann als Verknüpfung von Transpositionen geschrieben werden.

<u>Beweis:</u> Folgt aus Satz 42 und der Gleichung $(a_1\dots a_k)=(a_1\,a_2)\circ(a_2\,a_3)\circ\dots\circ(a_{k-1}\,a_k)$.

<u>Definition</u> Es sei $\sigma\in S_n$. Weiters sei w die Anzahl der Paare (i,j) mit der Eigenschaft, dass $1\le i<j\le n$ und $\sigma(i)>\sigma(j)$. Das Signum von σ ist definiert als $\operatorname{sgn}\sigma=(-1)^w$. Man sagt, σ sei gerade, wenn $\operatorname{sgn}\sigma=1$ bzw. σ sei ungerade wenn $\operatorname{sgn}\sigma=-1$.

<u>Lemma 44</u> Für $\sigma\in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}\sigma=\prod\limits_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

<u>Beweis:</u> Im Zähler und Nenner stehen die selben Differenzen mit einem Vorzeichenwechsel für jedes Paar (i,j) mit $1\le i<j\le n$ und $\sigma(i)>\sigma(j)$.

<u>Satz 45</u> Für $\sigma,\tau\in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau$.

<u>Beweis:</u> Mit Hilfe von Lemma 44 sieht man

$$\operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(\sigma\circ\tau)(j)-(\sigma\circ\tau)(i)}{j-i}=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(\sigma\circ\tau)(j)-(\sigma\circ\tau)(i)}{\tau(j)-\tau(i)}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}$$

$$=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}\cdot\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}=\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\tau.$$

<u>Korollar 46</u> (i) Ist $\tau\in S_n$ eine Transposition, so ist $\operatorname{sgn}\tau=-1$,

(ii) Ist $\sigma\in S_n$ gerade (bzw. ungerade) und $\sigma=\tau_k\circ\dots\circ\tau_1$ für gewisse Transpositionen $\tau_1,\dots,\tau_k\in S_n$, so ist k gerade (bzw. ungerade).

<u>Beweis:</u> (i) Ist $\tau=(i\,j)$, so kann man (wegen $(i\,j)=(j\,i)$) o.B.d.A. $i<j$ voraussetzen. Zu berücksichtigen sind nur die Paare (i,k) und (k,j) mit $i<k<j$ und (i,j). Daher ist w ungerade und $\operatorname{sgn}\tau=-1$.

(ii) Wegen Satz 45 und (i) ist $\operatorname{sgn}\sigma=\operatorname{sgn}(\tau_k\circ\dots\circ\tau_1)=\prod\limits_{i=1}^{k}\operatorname{sgn}\tau_i=(-1)^k$.

<u>Definition</u> Es sei K ein Körper. Eine Funktion $D_n: M_n(K)\to K$ heißt Determinantenfunktion, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

1) Hat $A\in M_n(K)$ die Spaltenvektoren $A^1,\dots,A^n$, so ist D_n linear als Funktion jeder dieser Spalten, d.h. ist $A^i=B^i+C^i$, so gilt (für $1\le i\le n$)

$$D_n(A^1,\dots,A^{i-1},B^i+C^i,A^{i+1},\dots,A^n)=D_n(A^1,\dots,A^{i-1},B^i,A^{i+1},\dots,A^n)$$
$$+D_n(A^1,\dots,A^{i-1},C^i,A^{i+1},\dots,A^n)$$

bzw. ist $A^i = \alpha B^i$ (mit $\alpha \in K$), so gilt (für $1 \leq i \leq n$)

$$D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, \alpha B^i, A^{i+1}, \dots, A^n) = \alpha \cdot D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, B^i, A^{i+1}, \dots, A^n).$$

2) Ist $A^i = A^{i+1}$ für ein $1 \leq i < n$ (dh sind zwei nebeneinander liegende Spaltenvektoren gleich), so ist $D_n(A^1, \dots, A^n) = 0$.

3) $D_n(I_n) = 1$ (wobei I_n die Einheitsmatrix bezeichnet).

Bemerkungen: 1) Anschaulich berechnet D_n das (n-dimensionale) mit einem Vorzeichen versehene Volumen des von den Vektoren $A^1, \dots, A^n$ aufgespannten (n-dimensionalen) Parallelepipeds. Das Vorzeichen hängt von der Lage der Vektoren zueinander bzw. ihrer Reihenfolge ab.

2) Wir werden zeigen, dass es genau eine Funktion mit diesen drei Eigenschaften gibt.

Lemma 47 Es sei $D_n: M_n(K) \to K$ eine Determinantenfunktion. Dann gelten:

(i) Vertauscht man zwei nebeneinander liegende Spaltenvektoren A^i, A^{i+1} (mit $1 \leq i < n$), so ändert sich das Vorzeichen, dh

$$D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, A^{i+1}, A^i, A^{i+2}, \dots, A^n) = -D_n(A^1, \dots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, A^{i+2}, \dots, A^n),$$

(ii) Sind zwei Spaltenvektoren gleich (dh $A^i = A^j$ für $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$), ist $D_n(A) = 0$,

(iii) Vertauscht man zwei beliebige Spaltenvektoren von A, so ändert sich das Vorzeichen, dh

$$D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n) = -D_n(A^1, \dots, A^j, \dots, A^i, \dots, A^n),$$

(iv) Sind die Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$ von A l.a., so ist $D_n(A) = 0$ (Anders ausgedrückt: Ist $\operatorname{rang} A < n$, so ist $D_n(A) = 0$.)

(v) Addiert man zu einer Spalte das Vielfache einer anderen, so ändert sich der Wert nicht, dh für $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$ und $\alpha \in K$ gilt

$$D_n(A^1, \dots, A^i + \alpha A^j, \dots, A^j, \dots, A^n) = D_n(A^1, \dots, A^i, \dots, A^j, \dots, A^n),$$

(vi) Für $\sigma \in S_n$ ist $D_n(A^{\sigma(1)}, \dots, A^{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot D_n(A^1, \dots, A^n)$.

Beweis: (i) $0 \overset{2)}{=} D_n(A^1, \dots, A^i + A^{i+1}, A^i + A^{i+1}, \dots, A^n)$

$$\overset{1)}{=} \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^i, A^i, \dots, A^n)}_{\overset{2)}{=} 0} + D_n(A^1, \dots, A^i, A^{i+1}, \dots, A^n) + D_n(A^1, \dots, A^{i+1}, A^i, \dots, A^n)$$
$$+ \underbrace{D_n(A^1, \dots, A^{i+1}, A^{i+1}, \dots, A^n)}_{\overset{2)}{=} 0}$$

$\Rightarrow D_n(A^1,\dots,A^{i+1},A^i,\dots,A^n) = -D_n(A^1,\dots,A^i,A^{i+1},\dots,A^n)$

(ii) OBdA sei $i<j$. Wir vertauschen nun A^j mit dem Spaltenvektor links davon bis A^i und A^j nebeneinander liegen. Dabei wechselt nach (i) jedesmal das Vorzeichen. Muss man w Vertauschungen durchführen, so folgt

$$D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n) = (-1)^w \cdot D_n(A^1,\dots,A^i,A^j,A^{i+1},\dots,A^{j-1},A^{j+1},\dots,A^n) \overset{2)}{=} 0.$$

(iii) $0 \overset{(ii)}{=} D_n(A^1,\dots,A^i+A^j,\dots,A^i+A^j,\dots,A^n)$

$$\overset{1)}{=} \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^i,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0} + D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n) + D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^i,\dots,A^n) + \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^j,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0}$$

$\Rightarrow D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^i,\dots,A^n) = -D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n)$

(iv) Nach Lemma 25 $\exists k\in\{1,\dots,n\}$, derart dass A^k als Linearkombination von $A^1,\dots,A^{k-1},A^{k+1},\dots,A^n$ darstellen lässt, d.h. $\exists \alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n\in K$ für die $A^k = \alpha_1 A^1+\dots+\alpha_{k-1}A^{k-1}+\alpha_{k+1}A^{k+1}+\dots+\alpha_n A^n$ gilt. Daher ist

$$D_n(A^1,\dots,A^k,\dots,A^n) = D_n\Big(A^1,\dots,\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i A^i + \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i A^i,\dots,A^n\Big)$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0} + \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i \underbrace{D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0} = 0.$$

(v) $D_n(A^1,\dots,A^i+\alpha A^j,\dots,A^j,\dots,A^n)$

$$\overset{1)}{=} D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n) + \alpha\cdot\underbrace{D_n(A^1,\dots,A^j,\dots,A^j,\dots,A^n)}_{\overset{(ii)}{=}0}$$

$$= D_n(A^1,\dots,A^i,\dots,A^j,\dots,A^n)$$

(vi) Nach Korollar 43 gibt es Transpositionen $\tau_1,\dots,\tau_k\in S_n$, derart dass $\sigma=\tau_k\circ\dots\circ\tau_1$. Jede Transposition entspricht dem Vertauschen zweier Spaltenvektoren und lässt daher (wegen (iii)) das Vorzeichen wechseln und $D_n(A^{\sigma(1)},\dots,A^{\sigma(n)}) = (-1)^k\cdot D_n(A^1,\dots,A^n) = \operatorname{sgn}\sigma\cdot D_n(A^1,\dots,A^n)$.

<u>Satz 48</u> (Eindeutigkeit der Determinantenfunktion) Es gibt höchstens eine Determinantenfunktion $D_n: M_n(K)\to K$. Ist $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in M_n(K)$, so ist

$$D_n(A) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(n),n} \quad (\text{Leibniz-Formel})$$

Beweis: Wir bezeichnen die Elemente der Standardbasis des K^n ausnahmsweise mit $E^1, \dots, E^n$. Besitzt $A \in M_n(K)$ die Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$ (und ist D_n Determinantenfunktion), so ist

$$D_n(A) = D_n(A^1, \dots, A^n) = D_n\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \cdot E^{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} \cdot E^{i_n}\right)$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \cdot D_n(E^{i_1}, \dots, E^{i_n}).$$

Ist $E^{i_j} = E^{i_k}$ für $1 \le j, k \le n$, $j \ne k$, so ist (wegen Lemma 47 (iii)) $D_n(E^{i_1}, \dots, E^{i_n}) = 0$.
Andernfalls ist $i_1, \dots, i_n$ eine Permutation von $1, \dots, n$, d.h. es gibt ein $\sigma \in S_n$ mit der Eigenschaft $i_1 = \sigma(1), \dots, i_n = \sigma(n)$ und daher

$$D_n(E^{i_1}, \dots, E^{i_n}) = D_n(E^{\sigma(1)}, \dots, E^{\sigma(n)}) \overset{\text{Lemma 47 (vii)}}{=} \operatorname{sgn}\sigma \cdot D_n(E^1, \dots, E^n)$$

$$= \operatorname{sgn}\sigma \cdot \underbrace{D_n(I_n)}_{\overset{3)}{=} 1} = \operatorname{sgn}\sigma.$$

Durch Einsetzen oben erhält man $D_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sgn}\sigma$.

Satz 49 (Existenz von Determinantenfunktionen) Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Determinantenfunktion $D_n : M_n(K) \to K$.

Beweis: Induktion nach n

$n = 1$: $M_1(K) \to K$, $a \mapsto a$ erfüllt trivialerweise alle Eigenschaften

$n = 2$: (Diesen Fall könnte man auslassen. Er dient der Motivation.)

Es sei $D_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Dann erfüllt D_2 alle geforderten Eigenschaften:

1) $D_2\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{pmatrix} = (a_1+a_2)d - b(c_1+c_2) = (a_1d - bc_1) + (a_2d - bc_2) = D_2\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} + D_2\begin{pmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{pmatrix}$

$D_2\begin{pmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{pmatrix} = (\alpha a)d - b(\alpha c) = \alpha(ad - bc) = \alpha D_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(und analog für die 2. Spalte)

2) $D_2\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} = ac - ac = 0$ 3) $D_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$

Es sei nun $n \ge 2$ (bzw. $n \ge 3$ wenn man das angenehmer findet) und die Existenz von Determinantenfunktionen $D_1, \dots, D_{n-1}$ schon gezeigt.
Für $A \in M_n(K)$ bezeichne $A_{ij} \in M_{n-1}(K)$ jene Matrix, die man aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhält

Für fest gewähltes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei nun

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} D_{n-1}(A_{i1}) + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{n-1}(A_{in})$$

Dabei ist D_{n-1} nach Satz 48 eindeutig bestimmt. D_n hängt scheinbar von der Wahl von $i \in \{1, \dots, n\}$ ab. Sobald gezeigt ist, dass D_n tatsächlich eine Determinantenfunktion ist, folgt aus Satz 48, dass man für jedes i die selbe Abbildung erhält. 27.10.2021

Wir überprüfen nun, dass D_n die geforderten Eigenschaften 1), 2) und 3) erfüllt.

1) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$ mit Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$ und $A^k = B^k + C^k$ (für $1 \le k \le n$). Weiters bezeichne $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$ die beiden Matrizen mit Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^{k-1}, B^k, A^{k+1}, \dots, A^n$ bzw. $A^1, \dots, A^{k-1}, C^k, A^{k+1}, \dots, A^n$ sowie A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} die Matrizen, die aus A, B, C durch streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgehen. Da D_{n-1} linear in jeder Spalte ist, gilt

$$D_{n-1}(A_{ij}) = D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij}) \quad \text{für } 1 \le j \le n, \ j \ne k$$

Weiters sind $A_{ik} = B_{ik} = C_{ik}$ und $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$. Man erhält nun

$$D_n(A) = D_n(A^1, \dots, A^n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij}) \right) + (-1)^{i+k} (b_{ik} + c_{ik}) D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} (-1)^{i+j} a_{ij} \left(D_{n-1}(B_{ij}) + D_{n-1}(C_{ij}) \right) + (-1)^{i+k} \left(b_{ik} D_{n-1}(B_{ik}) + c_{ik} D_{n-1}(C_{ik}) \right)$$

$$= \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{= b_{ij}} D_{n-1}(B_{ij}) + (-1)^{i+k} b_{ik} D_{n-1}(B_{ik})$$

$$+ \sum_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne k}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{= c_{ij}} D_{n-1}(C_{ij}) + (-1)^{i+k} c_{ik} D_{n-1}(C_{ik})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} D_{n-1}(B_{ij}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} c_{ij} D_{n-1}(C_{ij}) = D_n(B) + D_n(C)$$

Es sei nun $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $A^1, \ldots, A^{k-1}, \alpha A^k, A^{k+1}, \ldots, A^n$, sowie B_{ij} die Matrix, die aus B durch streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht. Dann ist $D_{n-1}(B_{ij}) = \alpha D_{n-1}(A_{ij})$ für $1 \leq j \leq n, j \neq k$, $A_{ik} = B_{ik}$ und $b_{ik} = \alpha a_{ik}$. Damit erhält man

$$D_n(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} b_{ij} D_{n-1}(B_{ij})$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (-1)^{i+j} \cdot \underbrace{b_{ij}}_{= a_{ij}} \cdot \underbrace{D_{n-1}(B_{ij})}_{= \alpha D_{n-1}(A_{ij})} + (-1)^{i+k} \cdot \underbrace{b_{ik}}_{= \alpha a_{ik}} \cdot D_{n-1} \underbrace{(B_{ik})}_{= A_{ik}}$$

$$= \alpha \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) + \alpha (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})$$

$$= \alpha \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij}) = \alpha D_n(A).$$

2) Ist $A^k = A^{k+1}$ für $1 \leq k < n$, so erhält man

$$D_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \notin \{k, k+1\}}} (-1)^{i+j} a_{ij} \underbrace{D_{n-1}(A_{ij})}_{\overset{IV}{=} 0}}_{= 0} + (-1)^{i+k} a_{ik} D_{n-1}(A_{ik}) + (-1)^{i+k+1} \underbrace{a_{i,k+1}}_{= a_{ik}} D_{n-1} \underbrace{(A_{i,k+1})}_{= A_{ik}}$$

$$= (-1)^{i+k} (a_{ik} D_{n-1}(A_{ik}) - a_{ik} D_{n-1}(A_{ik})) = 0.$$

3) Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} = I_n$, so erhält man

$$D_n(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} D_{n-1}(A_{ij})$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (-1)^{i+j} \underbrace{a_{ij}}_{= 0} D_{n-1}(A_{ij})}_{= 0} + \underbrace{(-1)^{2i}}_{= 1} \underbrace{a_{ii}}_{= 1} \underbrace{D_{n-1} \underbrace{(A_{ii})}_{= I_{n-1}}}_{\overset{IV}{=} 1} = 1$$

Korollar 50 Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion $M_n(K) \to K$.

Beweis: Folgt sofort aus den Sätzen 48 und 49.

Definition Die nach Satz 50 eindeutige Determinantenfunktion wird Determinante einer Matrix genannt. Ist $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n} \in M_n(K)$, so schreibt man dafür $\det(A)$ oder

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Bemerkungen: 1) Die Größe der Matrix A wird in der Notation unterdrückt (d.h. man schreibt $\det A$ und nicht $\det_n A$).

2) Die Leibniz-Darstellung $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ aus Satz 48 hat großen theoretischen Wert, ist für die Berechnung einer Determinante aber nur schlecht geeignet.

3) Determinanten von 2×2-Matrizen berechnet man meistens mit Hilfe der Formel

$$\begin{array}{c} + \qquad\qquad - \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4) Determinanten von 3×3-Matrizen kann man mit Hilfe der Regel von Sarrus berechnen:

$$\begin{array}{c} + \quad\; + \quad\; + \quad - \quad\; - \quad\; - \\ \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

5) Für $n \ge 4$ kann man den Determinanten nicht auf analoge Weise berechnen. (Nach der Leibniz-Formel müssen $n!$ Summanden auftreten und für $n \ge 4$ ist $n! > 2n$.)

Für $n \ge 2$ kann man Determinanten mit Hilfe der rekursiven Definition aus dem Beweis von Satz 49 berechnen (Entwicklung nach der i-ten Zeile):

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} \quad \text{(Laplacescher Entwicklungssatz)}$$

Den Wert des „Vorzeichens" $(-1)^{i+j}$ findet man dabei leicht mit Hilfe des „Schachbrettmusters"

$$\begin{matrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Beispiele: 1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - (-1)\cdot 7 = 24 + 7 = 31$

Man kann diese Rechnung nicht nur als Anwendung von Bemerkung 3), sondern auch als Entwicklung nach der ersten oder zweiten Zeile lesen.

2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-1) + \underbrace{0\cdot 2\cdot 4}_{=0} - (-1)\cdot 3\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 2 - \underbrace{0\cdot 1\cdot 2}_{=0} = 12 - 1 + 12 - 4 = 19$$

mittels Regel von Sarrus oder

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{-0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}_{=0} + 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot(4+4) - (4+1) = 24 - 5 = 19$$

mittels Entwicklung nach der 2. Zeile.

3) $$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} - 3\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 1\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 + 0 + 0 - 6 - 0 - 0 - 2\,(10 + 0 + 0 - 6 - 0 - 0) = 4 - 2\cdot 4 = -4$$

mittels Entwicklung nach der 1. Zeile oder

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(0 + 3 + 10 - 6 - 0 - 5) = -2\cdot 2 = -4$$

mittels Entwicklung nach der 3. Zeile

Satz 51 Es seien $A, B \in M_n(K)$. Dann ist $\det(A\cdot B) = (\det A)\cdot(\det B)$.

Beweis: Die Matrix A habe Spaltenvektoren $A^1, \ldots, A^n$ und es sei $B = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Dann hat $A\cdot B$ die Spaltenvektoren $\sum_{i=1}^n b_{i1} A^i, \ldots, \sum_{i=1}^n b_{ij} A^i, \ldots, \sum_{i=1}^n b_{in} A^i$ und daher

$$\det(A\cdot B) = \det\left(\sum_{i_1=1}^n b_{i_1,1} A^{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n b_{i_n,n} A^{i_n}\right)$$

$$\overset{1)}{=} \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1,1} \cdots b_{i_n,n} \cdot \det(A^{i_1}, \ldots, A^{i_n})$$

$$\overset{\text{Lemma 47 (ii)}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} \cdot \det(A^{\sigma(1)}, \ldots, A^{\sigma(n)})$$

$$\overset{\text{Lemma 47 (vi)}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} \cdot \operatorname{sgn}\sigma \cdot \underbrace{\det(A^1, \dots, A^n)}_{= \det A}$$

$$= (\det A) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot b_{\sigma(1),1} \cdots b_{\sigma(n),n} = (\det A) \cdot (\det B).$$

Korollar 52 Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar,

(ii) $\det A \neq 0$.

Gilt eine (und damit beide) dieser Bedingungen, so ist $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist A invertierbar, so $\exists A^{-1} \in M_n(K) \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Wegen Satz 51 folgt $1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = (\det A) \cdot (\det(A^{-1}))$.

Also ist $\det A \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist A nicht invertierbar, so ist $\operatorname{rang} A < n$ (nach Satz 39 (iv)) und daher $\det A = 0$ (nach Lemma 47 (iv)).

Korollar 53 Ist K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so ist $GL_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}$.

Beweis: Folgt sofort aus Korollar 52.

Satz 54 Es sei $A \in M_n(K)$. Dann ist $\det(A^T) = \det A$.

Beweis: Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt $\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma$, denn

$1 = \operatorname{sgn}\varepsilon = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = (\operatorname{sgn}\sigma) \cdot (\operatorname{sgn}\sigma^{-1})$. (wegen Satz 45).

Weiters ist $S_n = \{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\}$. (Allgemeiner gilt: Ist G eine Gruppe, so ist $G = \{a^{-1} \mid a \in G\}$, da die Abbildung $\varphi: G \to G$, $\varphi(a) = a^{-1}$ bijektiv ist. Es gelten ja $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a^{-1} = b^{-1} \Rightarrow a = (a^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} = b$ und $a = (a^{-1})^{-1} = \varphi(a^{-1})$ $\forall a \in G$.)

Ist nun $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, so gilt $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$ $\forall \sigma \in S_n$ und daher

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \det(A^T)$$

denn $A^T = (a_{ji})_{1 \le i,j \le n}$.

Korollar 55 Es sei $A \in M_n(K)$. Dann gelten:

(i) Die Abbildung $A \mapsto \det A$ ist linear in allen Zeilen von A,

(ii) Sind zwei Zeilen von A gleich, so ist $\det A = 0$,

(iii) Vertauscht man zwei Zeilen von A, so wechselt das Vorzeichen der Determinante,

(iv) Sind die Zeilenvektoren von A l.a., so ist $\det A = 0$,

(v) Addiert man zu einer Zeile von A das Vielfache einer anderen, so ändert sich der Wert der Determinante nicht,

(vi) Man kann $\det A$ berechnen, indem man nach einer Spalte entwickelt, d.h.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij}$$

$$= (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det A_{1j} + \dots + (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A_{ij} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} \cdot \det A_{nj}$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Beweis: Alle Aussagen folgen aus Satz 54 und den entsprechenden Aussagen für Zeilen in der Definition der Determinantenfunktion, Lemma 47 und Satz 49.

Lemma 56 Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$ und $a_{ij} = 0$ für $i > j$. Dann ist $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}.$$

Beweis: Induktion nach n. Die Behauptung ist trivial für $n=1$ (und auch klar für $n=2$, da $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - 0 \cdot a_{12} = a_{11}a_{22}$). Für $n \ge 2$ (bzw. $n \ge 3$) führen wir Entwicklung nach der letzten Zeile durch:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n+j} \underbrace{a_{nj}}_{=0} \cdot \det A_{nj} + \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} a_{nn} \cdot \det A_{nn}$$

$$= a_{nn} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{IV}}{=} (a_{11} \cdots a_{n-1,n-1}) \cdot a_{nn} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Bemerkung: Oft sind Zeilen- und Spaltenumformungen der einfachste Weg, eine Determinante zu berechnen.

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\text{Vertausche 1. und 4. Zeile}) = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Ersetze 2. Zeile durch} \\ \text{2. Zeile} - 5 \times \text{1. Zeile} \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{Vertausche 2. und 3. Zeile}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Ersetze 3. und 4. Zeile durch:} \\ \text{3. Zeile} + 7 \times \text{2. Zeile} \\ \text{4. Zeile} - \frac{3}{2} \times \text{2. Zeile} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{Ersetze 4. Zeile durch} \\ \text{4. Zeile} + \frac{1}{2} \times \text{3. Zeile} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4$$

(Bei dieser Determinante ist die Entwicklung nach der 3. Zeile allerdings geschickter.) 3.11.2021

Definition Zu $A \in M_n(K)$ (mit $n \geq 2$) sei die adjungierte Matrix $A^\# \in M_n(K)$ definiert als

$$A^\# = \left((-1)^{i+j} \det A_{ji}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} +\det A_{11} & -\det A_{21} & \cdots & (-1)^{n+1} \det A_{n1} \\ -\det A_{12} & +\det A_{22} & \cdots & (-1)^{n+2} \det A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n} & (-1)^{n+2} \det A_{2n} & \cdots & +\det A_{nn} \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet A_{kl} wieder die Matrix, die aus A durch Streichen der k-ten Zeile und l-ten Spalte hervorgeht.

Bemerkung: Achtung auf die Indizes! An der Stelle mit Index $(1,2)$ (d.h. in der 1. Zeile und 2. Spalte) steht $-\det A_{21}$, d.h. man muss aus A die 2. Zeile und 1. Spalte streichen!

Satz 57 Ist $A \in M_n(K)$ (und $n \geq 2$), so gelten:

(i) $A \cdot A^{\#} = A^{\#} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$,

(ii) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^{\#}$.

Beweis: (i) Die Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ habe Spaltenvektoren $A^1, \ldots, A^n$. Bezeichnet $E^1, \ldots, E^n$ wieder die Standardbasis, so gilt (mit $1 \leq i,j \leq n$)

$$\det(A^1, \ldots, A^{i-1}, E^j, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & 0 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & 0 & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & 1 & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & 0 & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{c}\text{Entwicklung nach} \\ \text{der } i\text{-ten Spalte}\end{array}\right)$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}.$$

Für $1 \leq i,k \leq n$ gilt nun einerseits

$$\det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^k, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \begin{cases} \det A & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{falls } k \neq i \end{cases}$$

und andererseits

$$\det(A^1, \ldots, A^{i-1}, A^k, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \det\left(A^1, \ldots, A^{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{jk} E^j, A^{i+1}, \ldots, A^n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jk} \cdot \det(A^1, \ldots, A^{i-1}, E^j, A^{i+1}, \ldots, A^n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det A_{ji} \cdot a_{jk}$$

Da $A^{\#} \cdot A = \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det A_{ji} \cdot a_{jk}\right)_{1 \leq i,k \leq n}$ ist damit $A^{\#} \cdot A = (\det A) \cdot I_n$ bewiesen. Aus $(A^T)^{\#} = (A^{\#})^T = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ folgt nun

$$(A \cdot A^{\#})^T = (A^{\#})^T \cdot A^T = (A^T)^{\#} \cdot A^T = (\det A^T) \cdot I_n = (\det A)\, I_n$$

und daher auch $A \cdot A^{\#} = ((\det A) \cdot I_n)^T = (\det A) \cdot I_n$.

(ii) Folgt sofort aus (i).

<u>Beispiel:</u> Gesucht ist A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Es ist

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 16 + 4 - 6 - 12 = -5 \; (\neq 0).$$

Ist $A^{-1} = (x_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$, so

$$x_{11} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad x_{12} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}, \qquad x_{13} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{6}{5}$$

$$x_{21} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad x_{22} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \qquad x_{23} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$x_{31} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \qquad x_{32} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}, \qquad x_{33} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$$

d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/5 & -6/5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4/5 & 7/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 5 & -5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$