1.7 Lineare Abbildungen

Definition: Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt (K-) linear, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

1) $\forall v, w \in V: \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$,

2) $\forall \alpha \in K\ \forall v \in V: \varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$.

Lemma 58 Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine (K-) lineare Abbildung. Dann gelten

(i) $\varphi(\sigma) = \sigma$ (d.h. genauer $\varphi(\sigma_V) = \sigma_W$),

(ii) $\varphi(-v) = -\varphi(v)\ \forall v \in V$.

Beweis: (i) $\varphi(\sigma) \overset{\text{Lemma 19}}{=} \varphi(0 \cdot \sigma) = 0 \cdot \varphi(\sigma) \overset{\text{Lemma 19}}{=} \sigma$

(ii) $\varphi(-v) \overset{\text{Lemma 19}}{=} \varphi((-1)v) = (-1)\varphi(v) \overset{\text{Lemma 19}}{=} -\varphi(v)$

Satz 59 Es sei K ein Körper.

(i) Ist $A \in M_{m,n}(K)$, so ist $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(v) = A \cdot v$ eine lineare Abbildung. (Dabei bezeichnet $A \cdot v$ das Produkt einer $m \times n$-Matrix und einer $n \times 1$-Matrix.)

(ii) Ist $\varphi: K^n \to K^m$ eine lineare Abbildung, so $\exists A \in M_{m,n}(K)$, derart dass $\varphi(v) = A \cdot v\ \forall v \in K^n$

Beweis: (i) $\varphi(v+w) = A \cdot (v+w) \overset{\text{Satz 13}}{=} A \cdot v + A \cdot w = \varphi(v) + \varphi(w)\ \forall v, w \in K^n$

und $\varphi(\alpha v) = A \cdot (\alpha v) \overset{\text{Übungsbsp 15}}{=} \alpha \cdot (A v) = \alpha \cdot \varphi(v)\ \forall \alpha \in K\ \forall v \in K^n$

(ii) Für $1 \leq i \leq n$ bezeichne $e_i \in K^n$ den i-ten Einheitsvektor und $A^i = \varphi(e_i) \in K^m$. Es sei nun $A \in M_{m,n}(K)$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$. Ist $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, so ist

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i A^i = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot v$$

Satz 60 Es sei $V (\neq \{\sigma\})$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, $\dim_K V = n$ und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Gilt für $v \in V$ die eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ (mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$), so ist die Abbildung $V \to K^n$, $v \mapsto [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ linear. (D.h. jedem Vektor $v \in V$ wird der Vektor $[v]_B$ seiner Koordinaten bezüglich der Basis B zugeordnet.)

Beweis: Für $v, w \in V$ gelte $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ (für eindeutig bestimmte $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$). Dann ist $v + w = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i$ und (da B eine Basis ist) ist das die eindeutig bestimmte Darstellung von $v+w$ als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$.

Daher ist

$$[v+w]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [v]_B + [w]_B .$$

Ist $\alpha \in K$, so ist $\alpha v = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i) v_i$ und (da B eine Basis ist) ist das die eindeutig bestimmte Darstellung von αv als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$. Daher ist

$$[\alpha v]_B = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha [v]_B .$$

8.11.2021

Bemerkung: Beachten Sie, dass die Abbildung $v \mapsto [v]_B$ nicht nur von B, sondern auch von der Reihenfolge der Vektoren $v_1, \dots, v_n \in B$ abhängt. Ganz korrekt müsste man an dieser Stelle eine „geordnete Basis" verwenden, d.h. eine Basis, in der die Reihenfolge der darin enthaltenen Vektoren festgelegt ist.

Beispiel (zu Koordinatenvektoren): Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ ist $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = v$, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist $[v]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $B_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist $[v]_{B_4} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, enthält B_4 drei l.u. Vektoren und ist daher eine Basis.

(Im gesamten Beispiel haben wir – schlampigerweise – Basen und geordnete Basen vermischt.)

Beispiele (zu linearen Abbildungen): 1) Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ist $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nach Satz 59 eine lineare Abbildung (und jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat diese Gestalt).

2) Für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ist $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung (wieder nach Satz 59) (und jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat diese Gestalt).

3) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-x + \frac{2y}{3}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (siehe Seite 28). Nach Satz 60 (bzw. Satz 59) ist die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(v) = [v]_B$ linear bzw. $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} y \\ -x + \frac{2}{3} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

4) $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ ist Basis von $P_2(\mathbb{R})$ (wobei $p_i(x) = x^i$ für $i \in \{0,1,2\}$). Nach Satz 60 ist die Abbildung $\varphi: P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(p) = [p]_B$ (d.h. $\varphi(a_2x^2 + a_1x + a_0) = (a_0, a_1, a_2)^T$) linear.

5) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $M_2(\mathbb{R})$. Nach Satz 60 ist die Abbildung $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$, $\varphi(A) = [A]_B$ (d.h. $\varphi\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$) linear.

6) Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Die Nullabbildung $\varphi: V \to W$, $\varphi(v) = 0 \ \forall v \in V$ ist linear (denn $\varphi(v+w) = 0 = 0 + 0 = \varphi(v) + \varphi(w)$ und $\varphi(\alpha v) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \varphi(v)$ für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in K$).

7) Es sei V ein K-Vektorraum. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V: V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) = v \ \forall v \in V$ ist linear (denn $\mathrm{id}_V(v+w) = v + w = \mathrm{id}_V(v) + \mathrm{id}_V(w)$ und $\mathrm{id}_V(\alpha v) = \alpha v = \alpha\, \mathrm{id}_V(v)$ für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in K$).

8) Die Abbildung $\mathcal{F}_K \to \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist linear (da laut Analysis $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha a_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gelten für alle $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{F}_K$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$).

9) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall. Die Abbildung $C^\infty(I) \to C^\infty(I)$, $f \mapsto f'$ ist linear (denn $(f+g)' = f' + g'$ und $(\alpha f)' = \alpha f'$ $\forall f, g \in C^\infty(I)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$).

10) Ebenso ist die Abbildung $P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$, $p \mapsto p'$ linear.

11) Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann ist $C([a,b]) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ linear (denn $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ und $\int_a^b (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$ $\forall f, g \in C([a,b])$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$).

<u>Satz 61</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Ist B eine Basis von V, so ist φ bereits durch die Werte von $\varphi(v)$ (mit $v \in B$) eindeutig bestimmt. (D.h. ist zu jedem $v \in B$ ein $w_v \in W$ gegeben, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = w_v \ \forall v \in B$.)

<u>Beweis</u>: Eindeutigkeit: Angenommen, $\varphi: V \to W$ ist eine lineare Abbildung, die die geforderte Eigenschaft besitzt. Ist $v \in V$, so gibt es es $v_1, \dots, v_n \in B$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit der Eigenschaft $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Wenn $\varphi(v_i) = w_i \ (\in W)$ gegeben ist (für $1 \leq i \leq n$), so muss

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i \quad (*)$$

gelten.

Existenz: Wir zeigen, dass die durch $(*)$ gegebene Abbildung linear ist.

Die Vektoren $v, w \in V$ sollen die Darstellungen $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ besitzen (wobei $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq B$ eine hinreichend große Menge von Basisvektoren sein soll). Dann ist $v + w = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i$ und $\alpha v = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) v_i$ für $\alpha \in K$.

Wenn für $1 \le i \le n$ wieder $\varphi(v_i) = w_i$ gelten soll, so ist

$$\varphi(v+w) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i = \varphi(v) + \varphi(w)$$

und für $\alpha \in K$ ist $\varphi(\alpha v) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \alpha_i) w_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \alpha \varphi(v)$.

Definition: Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ wird Isomorphismus (von K-Vektorräumen) genannt.

Definition: Zwei K-Vektorräume V und W werden isomorph genannt, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : V \to W$ gibt. Man schreibt dafür $V \cong W$.

Lemma 62 Es seien U, V und W drei K-Vektorräume.

(i) Sind $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen, so ist auch $\psi \circ \varphi : V \to U$ eine lineare Abbildung,

(ii) Sind $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ Isomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : V \to U$ ein Isomorphismus,

(iii) Ist $\varphi : V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varphi^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus.

Beweis: (i) Sind $v_1, v_2 \in V$, so ist

$$(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)) = \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2))$$
$$= (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2).$$

Ist $v \in V$ und $\alpha \in K$, so ist

$$(\psi \circ \varphi)(\alpha v) = \psi(\varphi(\alpha v)) = \psi(\alpha \varphi(v)) = \alpha \psi(\varphi(v)) = \alpha \cdot (\psi \circ \varphi)(v).$$

(ii) Die Abbildung $\psi \circ \varphi : V \to U$ ist linear nach (i) und bijektiv als Verknüpfung bijektiver Abbildungen.

(iii) Es seien $w_1, w_2 \in W$. Da φ bijektiv ist, gibt es eindeutig bestimmte $v_1, v_2 \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Da φ linear ist, gilt $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = w_1 + w_2$ und daher $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$.

Es sei nun $w \in W$ und $\alpha \in K$. Da φ bijektiv ist, gibt es genau ein $v \in V$, derart dass $\varphi(v) = w$. Da φ linear ist, ist $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha w$ und daher $\varphi^{-1}(\alpha w) = \alpha v = \alpha\varphi^{-1}(w)$. Damit ist gezeigt, dass $\varphi^{-1}: W \to V$ linear ist. Schließlich ist φ^{-1} bijektiv als Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung.

<u>Satz 63</u> (i) Jeder K-Vektorraum V ist zu sich selbst isomorph (d.h. $V \cong V$),
(ii) Es seien V und W zwei K-Vektorräume. Ist $V \cong W$, so gilt auch $W \cong V$,
(iii) Es seien V, W und U drei K-Vektorräume. Aus $V \cong W$ und $W \cong U$ folgt $V \cong U$.
D.h. die Isomorphie von K-Vektorräumen besitzt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation.

<u>Beweis:</u> (i) Für jeden K-Vektorraum V ist $id_V: V \to V$ ein Isomorphismus.
(ii) Da $V \cong W$ gilt, gibt es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$. Nach Lemma 62 (iii) ist dann auch $\varphi^{-1}: W \to V$ ein Isomorphismus und daher ist auch $W \cong V$.
(iii) Da $V \cong W$ und $W \cong U$ gelten, gibt es Isomorphismen $\varphi: V \to W$ und $\psi: W \to U$. Nach Lemma 62 (ii) ist dann auch $\psi \circ \varphi: V \to U$ ein Isomorphismus und daher $V \cong U$.

<u>Satz 64</u> Es sei $V (\neq \{0\})$ ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\dim_K V = n$. Dann ist $V \cong K^n$. Genauer gilt: Ist $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V, so ist $\varphi: V \to K^n$, $\varphi(v) = [v]_B$ ein Isomorphismus. (Dabei hat $[v]_B$ die selbe Bedeutung wie in Satz 60.)

<u>Beweis:</u> Es wurde bereits in Satz 60 gezeigt, dass φ linear ist.
Sind $v, w \in V$ und ist $\varphi(v) = \varphi(w) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, so ist $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = w$, d.h. φ ist injektiv. Ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in K^n$ gegeben, so ist $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)$.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Sind zwei K-Vektorräume isomorph, so haben sie die selbe Struktur (als K-Vektorräume). Durch Satz 64 wird die Struktur endlichdimensionaler K-Vektorräume vollständig beschrieben: Ist $\dim_K V = n$, so hat V (als K-Vektorraum) die selbe Struktur wie K^n. D.h. die Struktur von V ist durch $\dim_K V$ bereits vollständig festgelegt.

2) Zwei endlichdimensionale K-Vektorräume V und W mit $\dim_K V = \dim_K W$ können sich aber in anderer Hinsicht durchaus unterscheiden! Z.B. sind $P_3(\mathbb{R})$ und $M_2(\mathbb{R})$ zwei reelle Vektorräume und $\dim_{\mathbb{R}} P_3(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} M_2(\mathbb{R}) = 4$. Nach Satz 64 sind beide Vektorräume zu $\mathbb{R}^4$ isomorph (und zwar z.B. durch die

Isomorphismen $P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \longmapsto (a_0, a_1, a_2, a_3)^T$ und $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$. Die beiden Vektorräume $P_3(\mathbb{R})$ und $M_2(\mathbb{R})$ haben aber auch beide eine multiplikative Struktur, die sich aber völlig unterscheidet: $M_2(\mathbb{R})$ ist (mit der Addition und Multiplikation von Matrizen) ein Ring mit Einselement (nach Korollar 15), aber $P_3(\mathbb{R})$ ist bezüglich der Multiplikation von Polynomen nicht abgeschlossen (z.B. weil $x^3 \cdot x^3 = x^6 \notin P_3(\mathbb{R})$). Die Multiplikation von Elementen von $P_3(\mathbb{R})$ ist kommutativ, die auf $M_2(\mathbb{R})$ nicht. In $M_2(\mathbb{R})$ gibt es $A, B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (z.B. $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$), aber es gibt keine Polynomfunktionen $p, q \in P_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $p \cdot q = 0$.

3) Ein unendlichdimensionaler Vektorraum V kann zu einem echten Teilraum W von sich selbst isomorph sein (d.h. es gelten $W \subsetneqq V$ und $W \cong V$).

<u>Lemma 65</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.

(i) Ist U ein Teilraum von V, so ist $\varphi(U) = \{\varphi(v) \mid v \in U\}$ ein Teilraum von W,

(ii) Ist U ein Teilraum von W, so ist $\varphi^{-1}(U) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ ein Teilraum von V.

<u>Beweis</u>: (i) Sind $w_1, w_2 \in \varphi(U)$, so $\exists v_1, v_2 \in U : \varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Dann ist $w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2)$. Da $v_1 + v_2 \in U$, ist $w_1 + w_2 \in \varphi(U)$.
Ist $w \in \varphi(U)$ und $\alpha \in K$, so $\exists v \in U : \varphi(v) = w$. Dann ist $\alpha w = \alpha \varphi(v) = \varphi(\alpha v)$. Da $\alpha v \in U$, ist $\alpha w \in \varphi(U)$.

(ii) Sind $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(U)$, so ist $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in U$ und daher $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in U$. Also ist $v_1 + v_2 \in \varphi^{-1}(U)$. Ist $\alpha \in K$ und $v \in \varphi^{-1}(U)$, so ist $\varphi(v) \in U$ und daher $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v) \in U$. Also ist $\alpha v \in \varphi^{-1}(U)$.

<u>Definition</u> Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann nennt man

$\operatorname{Kern}\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$ den Kern von φ und

$\operatorname{Bild}\varphi = \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$ das Bild von φ.

Korollar 66 Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gelten:

(i) $\operatorname{Kern}\varphi$ ist ein Teilraum von V,

(ii) $\operatorname{Bild}\varphi$ ist ein Teilraum von W.

Beweis: (i) Folgt aus Lemma 65 (ii), weil $\{0\}$ Teilraum von W ist.

(ii) Folgt aus Lemma 65 (i), weil V Teilraum von V ist.

Beispiele: 1) Sind $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, so ist $\left\{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta_1 x + \beta_2 y = 0\right\}$ Kern der linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$. (vergleiche Übungsbg. 22)

2) Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, so ist $\{(x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$ Kern der linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x_1, \dots, x_n)^T = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ (vergleiche Übungsbg. 23)

3) $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f + f'' = 0\}$ ist Kern der linearen Abbildung $\varphi: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(f) = f + f''$

4) Ist $\varphi: \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}$, $\varphi((a_n)_{n\geq 1}) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, so ist $\operatorname{Kern}\varphi = \mathcal{F}_n$.

Definition: Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann heißt $\operatorname{Rang}\varphi := \dim_K \operatorname{Bild}\varphi$ der Rang von φ.

Bemerkung: Sind V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung, so wird $\dim_K \operatorname{Kern}\varphi$ manchmal der Defekt von φ genannt.

Lemma 67 Es sei K ein Körper, $A \in M_{m,n}(K)$ und $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(v) = Av$. Dann ist $\operatorname{Rang}\varphi = \operatorname{Rang} A$.

Beweis: Bezeichnen $A^1, \dots, A^n$ die Spaltenvektoren von A, so ist
$$\operatorname{Bild}\varphi = \left\{\sum_{i=1}^n x_i A^i \,\middle|\, x_1, \dots, x_n \in K\right\} = [A^1, \dots, A^n]$$ und daher
$$\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K \operatorname{Bild}\varphi = \dim_K [A^1, \dots, A^n] = \operatorname{Rang} A.$$

Satz 68 Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv,

(ii) $\operatorname{Kern}\varphi = \{0\}$,

(iii) $\dim_K \operatorname{Kern}\varphi = 0$,

(iv) Ist $M \subseteq V$ und M ist l.u., so ist $\varphi(M)$ l.u.,

(v) Ist B eine Basis von V, so ist $\varphi(B)$ l.u.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach Lemma 58 (i) ist $\varphi(\sigma) = \sigma$ und daher $\{\sigma\} \subseteq \operatorname{Kern}\varphi$. Da φ injektiv ist, kann es kein $v \in V \setminus \{\sigma\}$ mit der Eigenschaft $\varphi(v) = \sigma$ geben und daher $\operatorname{Kern}\varphi = \{\sigma\}$.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) Trivial

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Es seien $v_1, \dots, v_n \in M$ (paarweise verschieden) und $\alpha_1\varphi(v_1) + \dots + \alpha_n\varphi(v_n) = \sigma$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Wegen der Linearität von φ gilt dann auch $\varphi(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \sigma$. Dh $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Kern}\varphi = \{\sigma\}$. Daher ist $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sigma$, woraus (wegen der linearen Unabhängigkeit von M) $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ folgt.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Gilt trivialerweise, da jede Basis l.u. ist

(v) $\Rightarrow$ (i) Es seien $v, w \in V$ und $\varphi(v) = \varphi(w)$. Da B eine Basis von V ist, $\exists v_1, \dots, v_n \in B \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$.

Aus $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i\right) = \varphi(v) = \varphi(w) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(v_i)$

folgt $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i)\varphi(v_i) = \sigma$ und daraus (da $\varphi(B)$ l.u. ist), dass $\beta_1 - \alpha_1 = \dots = \beta_n - \alpha_n = 0$. Dh $\alpha_i = \beta_i$ für $1 \leq i \leq n$ und daher

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = w.$$

Satz 69 Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi + \dim_K \operatorname{Bild}\varphi = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi + \operatorname{Rang}\varphi$$

Beweis: Nach Korollar 66 (i) ist $\operatorname{Kern}\varphi$ ein Teilraum von V. Wegen Korollar 32 (ii) ist $\operatorname{Kern}\varphi$ daher ebenfalls endlichdimensional. Es sei $B' = \{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$. Nach Korollar 28 kann B' zu einer Basis $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V ergänzt werden. Wir behaupten, dass $\{\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)\}$ eine Basis von $\varphi(V)$ ist. Wir zeigen zunächst, dass $[\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)] = \varphi(V)$. Dabei ist klar, dass $[\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)] \subseteq \varphi(V)$ gilt. Ist $w \in \varphi(V)$, so $\exists v \in V : \varphi(v) = w$. Weil B eine Basis ist $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K : v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Daraus erhält man

$$w = \varphi(v) = \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(v_i)}_{=\sigma} + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \varphi(v_i) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i \varphi(v_i) \in [\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)].$$

Damit ist auch $\varphi(V) \subseteq [\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)]$ gezeigt und der Beweis der Gleichung $[\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)] = \varphi(V)$ ist abgeschlossen.

Wir zeigen nun, dass $\varphi(v_{k+1}), \dots, \varphi(v_n)$ l.u. sind. Ist $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \cdot \varphi(v_i) = o$, so ist auch $\varphi\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i\right) = o$, also $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i \in \operatorname{Kern}\varphi$. Da B' Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$ ist, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$: $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Daraus erhält man $\sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i) v_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i v_i = o$, woraus folgt, dass $\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0$ (da B eine Basis ist).

Aus dem bisher gezeigten erhält man

$$\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K \operatorname{Bild}\varphi = n-k = \dim_K V - \dim_K \operatorname{Kern}\varphi.$$

<u>Bemerkung</u>: Ist $\varphi: V \to W$ injektiv, ist im Beweis von Satz 69 $B' = \emptyset$ und $k = 0$. Ist $\varphi(v) = o \ \forall v \in V$, so ist $\operatorname{Kern}\varphi = V$ und $\operatorname{Bild}\varphi = \{o\}$ daher

$$\dim_K V = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi + 0 = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi + \dim_K \operatorname{Bild}\varphi.$$

<u>Korollar 70</u> Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gelten:

(i) $\operatorname{Rang}\varphi \leq \dim_K V$,

(ii) φ ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}\varphi = \dim_K V$,

(iii) φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Rang}\varphi = \dim_K W$.

<u>Beweis</u>: (i) Nach Satz 69 ist $\dim_K V = \underbrace{\dim_K \operatorname{Kern}\varphi}_{\geq 0} + \operatorname{Rang}\varphi \geq \operatorname{Rang}\varphi$.

(ii) Nach Satz 68 ist φ genau dann injektiv wenn $\dim_K \operatorname{Kern}\varphi = 0$. Wegen Satz 69 ist das äquivalent zu $\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K V$.

(iii) Die Abbildung φ ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild}\varphi = W$ ist. Nach Korollar 32 (ii) ist das äquivalent zu $\dim_K W = \dim_K \operatorname{Bild}\varphi = \operatorname{Rang}\varphi$.

<u>Korollar 71</u> Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume mit $\dim_K V = \dim_K W$ und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist injektiv,

(ii) φ ist surjektiv,

(iii) φ ist bijektiv.

Beweis: Wir zeigen zunächst mit Hilfe von Korollar 70, dass (i) und (ii) äquivalent sind:

φ ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K V$ $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Rang}\varphi = \dim_K W$ $\Longleftrightarrow$ φ ist surjektiv.

Gelten nun entweder (i) oder (ii), d.h. ist φ injektiv oder surjektiv, so besitzt es nach dem bisher gezeigten auch die andere dieser beiden Eigenschaften und ist daher bijektiv, d.h. (iii) gilt.

Ist umgekehrt φ bijektiv (d.h. gilt (iii)), so gelten trivialerweise auch (i) und (ii).

Korollar 72 Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Dann sind äquivalent:

(i) $V \cong W$,

(ii) $\dim_K V = \dim_K W$.

Beweis: (i) Ist $V \cong W$, so gibt es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$. Wegen Korollar 70 (ii) und (iii) folgt $\dim_K V = \operatorname{Rang}\varphi = \dim_K W$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es bezeichne $n := \dim_K V = \dim_K W$. Wegen Satz 64 gilt dann $V \cong K^n \cong W$ und daher $V \cong W$ (wegen Satz 63) falls $n \geq 1$. Falls $n = 0$, so ist $V = \{0\}$ und $W = \{0\}$ und daher $V \cong W$.

10.11.2021

Bemerkung: Man kann auch lineare Abbildungen zwischen beliebigen endlichdimensionalen Vektorräumen mit Hilfe von Matrizen darstellen, indem man in beiden Vektorräumen je eine Basis wählt und „den Umweg über Koordinatenvektoren nimmt".

Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine lineare Abbildung. Weiters sei B (bzw. C) eine Basis von V (bzw. W), $n = \dim_K V$ und $m = \dim_K W$. Bezeichnen $\Psi_V: V \to K^n$, $\Psi_V(v) = [v]_B$ und $\Psi_W: W \to K^m$, $\Psi_W(w) = [w]_C$ die Abbildungen, die Vektoren ihre jeweiligen Koordinatenvektoren zuordnet, so kann man die Situation mit Hilfe des folgenden Diagramms beschreiben:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "\varphi"] \arrow[ddd, "\Psi_V"'] & & & W \arrow[ddd, "\Psi_W"] \\
& v \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \varphi(v) \arrow[d, mapsto] & \\
& {[v]_B} \arrow[r, mapsto, dashed] & {[\varphi(v)]_C} & \\
K^n \arrow[rrr, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

Die Abbildung $\tilde{\varphi}: K^n \to K^m$ am unteren Rand ist linear nach

Lemma 62, da Ψ_V und Ψ_W (nach Satz 64) Isomorphismen sind und sie als $\tilde{\varphi} = \Psi_W \circ \varphi \circ \Psi_V^{-1}$ geschrieben werden kann. Nach Satz 59 (ii) besitzt $\tilde{\varphi}$ daher eine Darstellung als Multiplikation mit einer Matrix.

Als Beispiel betrachten wir die Abbildung $D: P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}),\ p \mapsto p'$, die jedem Polynom seine Ableitung zuordnet, d.h.

$$D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1.$$

Wählt man nun die Basen $B = \{p_3, p_2, p_1, p_0\}$ und $C = \{p_2, p_1, p_0\}$, (mit $p_i(x) = x^i$ für $i \in \{0,1,2,3\}$), so sind

$$[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0]_B = (a_3, a_2, a_1, a_0)^T \quad \text{und}$$
$$[D(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)]_C = [3a_3x^2 + 2a_2x + a_1]_C = (3a_3, 2a_2, a_1)^T,$$

Die $\tilde{D}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ kann beschrieben werden als

$$\tilde{D}\begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a_3 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Auch bei linearen Abbildungen $\varphi: K^n \to K^m,\ v \mapsto \varphi(v)$ kann es sinnvoll sein, stattdessen eine Abbildung $\tilde{\varphi}: K^n \to K^m,\ [v]_B \mapsto [\varphi(v)]_C$ bezüglich geeignet gewählten Basen B (bzw C) von K^n (bzw K^m) zu betrachten, z.B. wenn $\tilde{\varphi}$ eine besonders einfache oder übersichtliche Gestalt hat. Aus zeitlichen Gründen gehen wir darauf nicht weiter ein.