1.8 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (über einem Körper K) ist ein System von Gleichungen folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Dabei sind $a_{ij} \in K$ (mit $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$) und $b_1, \dots, b_m \in K$ vorgegeben. Gesucht sind alle $x_1, \dots, x_n \in K$, die m Gleichungen erfüllen. Gilt $b_1 = \dots = b_m = 0 \ (\in K)$, so wird das lineare Gleichungssystem homogen genannt, andernfalls inhomogen.

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K), \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n,$$

so kann man das Gleichungssystem kurz als $A \cdot x = b$ schreiben. Die Matrix A wird dabei Koeffizientenmatrix genannt.

<u>Satz 73</u> Es sei $A \in M_{m,n}(K)$. Dann gelten:

(i) Die Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ bilden einen Teilraum W von K^n und $\dim_K W = n - \operatorname{Rang} A$,

(ii) Das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt genau dann nur die triviale Lösung $x = 0$ wenn $\operatorname{Rang} A = n$,

(iii) Ist $\operatorname{Rang} A < n$, so besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ stets $k = n - \operatorname{Rang} A$ l.u. Lösungen $v_1, \dots, v_k \in K^n$, sodass $W = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in K\}$.

<u>Beweis</u>: (i) Es sei $\varphi: K^n \to K^m$, $x \mapsto A \cdot x$. Nach Satz 59(i) ist φ eine lineare Abbildung und es gilt: $A \cdot x = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Kern}\varphi$. Setzt man $W := \operatorname{Kern}\varphi$, so ist W nach Korollar 66 ein Teilraum von K^n und

$$\dim_K W = \dim_K \operatorname{Kern}\varphi \overset{\text{Satz 69}}{=} \dim_K K^n - \operatorname{Rang}\varphi \overset{\text{Lemma 67}}{=} n - \operatorname{Rang} A.$$

(ii) $A \cdot x = 0$ besitzt nur die Lösung $x = 0 \Leftrightarrow W = \{0\} \Leftrightarrow \dim_K W = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Rang} A = n$

(iii) Es sei $\{v_1,\dots,v_k\}$ eine Basis von W. Dann ist $k = n - \operatorname{Rang} A$ und

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \,\middle|\, \alpha_1,\dots,\alpha_k \in K \right\}.$$

Man fasst die Koeffizientenmatrix A und den Vektor b zur erweiterten Koeffizientenmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M_{m,n+1}(K) \quad \text{zusammen.}$$

Satz 74 (i) Das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{Rang} A = \operatorname{Rang} A'$,

(ii) Sind $x_1, x_2 \in K^n$ Lösungen des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x = b$, so ist $x_1 - x_2$ Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = o$,

(iii) Ist $x_0 \in K^n$ Lösung des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x = b$ und $v \in K^n$ Lösung des (homogenen) Gleichungssystems $A\cdot x = o$, so ist $x_0 + v \in K^n$ Lösung des (inhomogenen) Gleichungssystems $A\cdot x = b$,

(iv) Ist $W = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1,\dots,\alpha_k \in K\} \subseteq K^n$ der Teilraum der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\cdot x = o$ (und $k = n - \operatorname{Rang} A$ und $\{v_1,\dots,v_k\}$ eine Basis von W) und $x_0 \in K^n$ Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\cdot x = b$, so ist die Menge der Lösungen des inhomogenen Gleichungssystem $A\cdot x = b$ durch

$$x_0 + W = \{x_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1,\dots,\alpha_k \in K\} \ (\subseteq K^n) \quad \text{gegeben.}$$

(v) Ist das (inhomogene) Gleichungssystem $A\cdot x = b$ lösbar, so ist es genau dann eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{Rang} A = n$.

Beweis: (i) Es bezeichne wieder (wie im Beweis von Satz 73) $\varphi: K^n \to K^m$, $\varphi(x) = A\cdot x$ und $A^1,\dots,A^n$ seien die Spaltenvektoren von A. Dann gilt:

$A\cdot x = b$ ist lösbar $\iff b \in \operatorname{Bild}\varphi = [A^1,\dots,A^n] \iff [A^1,\dots,A^n,b] = [A^1,\dots,A^n]$

$\overset{\text{Kor. 32 (ii)}}{\iff} \dim_K [A^1,\dots,A^n,b] = \dim_K [A^1,\dots,A^n] \iff \operatorname{Rang} A' = \operatorname{Rang} A$

(ii) Aus $A\cdot x_1 = A\cdot x_2 = b$ folgt $A\cdot(x_1 - x_2) = A\cdot x_1 - A\cdot x_2 = b - b = o$.

(iii) Aus $A\cdot x_0 = b$ und $A\cdot v = o$ folgt $A\cdot(x_0+v) = A\cdot x_0 + A\cdot v = b + o = b$.

(iv) Es bezeichne $L \,(\subseteq K^n)$ die Menge der Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. (Laut Voraussetzung ist dann $x_0 \in L$.)
Ist $x_1 \in L$, so $x_1 - x_0 \in W$ (nach (ii)) und daher $x_1 \in x_0 + W$. Damit ist $L \subseteq x_0 + W$ bewiesen. Ist umgekehrt $x_1 \in x_0 + W$, so ist $x_1 \in L$ (nach (iii)), d.h. es gilt auch $x_0 + W \subseteq L$. Also ist insgesamt $L = x_0 + W$.

(v) $A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar $\overset{(iv)}{\Longleftrightarrow} W = \{0\} \Longleftrightarrow \dim_K W = 0$

$\overset{\text{Satz 73}}{\Longleftrightarrow} n - \operatorname{Rang} A = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{Rang} A = n.$ 15.11.2021

<u>Beispiel</u>: Es ist durchaus möglich, dass ein inhomogenes lineares Gleichungssystem unlösbar ist. z.B. besitzt das Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$)

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 5z &= 3 \\ x - y + 7z &= 1 \\ x + y + z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

keine Lösungen, da die Gleichungen einander widersprechen: Addiert man die ersten beiden Gleichungen, so erhält man $2x + 2y + 2z = 4$, was zu $x + y + z = 2$ äquivalent ist und daher der dritten Gleichung widerspricht.
Das wird in Satz 74 (i) dadurch ausgedrückt, dass hier $\operatorname{Rang} A < \operatorname{Rang} A'$ ist:

$$\operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

aber

$$\operatorname{Rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) = \operatorname{Rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \end{array}\right) = \operatorname{Rang}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = 3.$$

<u>Bemerkungen</u>: 1) Man kann sich Teil (iv) von Satz 74 folgendermaßen merken:
Die

hat Gestalt	Allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ‖ spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems + allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems.

2) Aus Satz 74 folgt sofort: Ist $K = \mathbb{R}$ (oder $K = \mathbb{C}$), so hat das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ keine, eine oder (überabzählbar) unendlich viele Lösungen.

3) Ist $m=n$ und ist das Gleichungssystem $A\cdot x=b$ eindeutig lösbar, so ist die (eindeutige) Lösung x_0 durch $x_0=A^{-1}\cdot b$ gegeben.
(Ist $A\cdot x=b$ eindeutig lösbar, so muss $\text{Rang}\,A=n$ gelten. Wegen Satz 39 (iv) ist A invertierbar und $A^{-1}b$ ist Lösung, da $A\cdot(A^{-1}b)=(AA^{-1})b=I_n b=b$.)

Gaußsches Eliminationsverfahren (Ein Algorithmus zur Entscheidung der Lösbarkeit und zum Finden der allgemeinen Lösung eines linearen Gleichungssystems.)

Beruht auf folgender Idee: Wende das Verfahren zur Bestimmung des Rangs einer Matrix (Satz 37) auf die erweiterte Koeffizientenmatrix A' an, mit der Einschränkung, dass die letzte Spalte (also b am Beginn des Verfahrens) nicht mit einer anderen Spalte vertauscht werden darf. Das entspricht der schrittweisen Umformung des Gleichungssystems durch die folgenden Umformungen, bei denen sich die Menge der Lösungen nicht ändert:

1) Vertauschen zweier Zeilen einer Matrix entspricht Vertauschen zweier Gleichungen.
2) Vertauschen zweier Spalten entspricht dem Vertauschen der Reihenfolge der Summanden mit $x_1,\dots,x_n$ in den Gleichungen.
3) Addition eines Vielfachen eines Zeilenvektors zu einem anderen Zeilenvektor entspricht der Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Man erhält ein Gleichungssystem der folgenden Gestalt:

$$\left.\begin{array}{rcl}
\bar a_{11}x_1' + \bar a_{12}x_2' + \cdots\cdots + \bar a_{1n}x_n' &=& \bar b_1\\
\bar a_{22}x_2' + \cdots\cdots + \bar a_{2n}x_n' &=& \bar b_2\\
\ddots \qquad\qquad & \vdots & \\
\bar a_{rr}x_r' + \cdots + \bar a_{rn}x_n' &=& \bar b_r\\
0 &=& \bar b_{r+1}\\
& \vdots & \\
0 &=& \bar b_m
\end{array}\right\} \text{ mit } \bar a_{11},\dots,\bar a_{rr}\neq 0$$

Dabei sind die $\bar a_{ij}$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ aus den a_{ij} bzw. $\bar b_1,\dots,\bar b_m$ aus $b_1,\dots,b_m$ entstanden und $x_1',\dots,x_n'$ ist eine Permutation von $x_1,\dots,x_n$ (die durch Vertauschen von Spalten entstanden ist).

Bezeichnen

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & & \bar{a}_{1n} \\ & \bar{a}_{22} & \cdots & & \bar{a}_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \bar{a}_{rr} \cdots & \bar{a}_{rn} \\ & 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{pmatrix}, \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & & \bar{a}_{1n} & \bar{b}_1 \\ & \bar{a}_{22} & \cdots & & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & \bar{a}_{rr} \cdots & \bar{a}_{rn} & \bar{b}_r \\ & & & & & \bar{b}_{r+1} \\ & 0 & & & & \vdots \\ & & & & & \bar{b}_m \end{pmatrix},$$

so gilt: $A \cdot x = b$ ist lösbar $\iff$ $\bar{A} \cdot x' = \bar{b}$ ist lösbar (mit $x' = (x_1', \dots, x_n')^T$)

$\iff$ Rang $\bar{A}$ = Rang $\bar{A}'$ $\iff$ rang $\bar{A}' = r$ $\iff$ $\bar{b}_{r+1} = \dots = \bar{b}_m = 0$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $\bar{A} \cdot x' = \bar{b}$ findet man folgendermaßen: Setze $x_r' = \bar{a}_{rr}^{-1} \bar{b}_r$, $x_{r+1}' = \dots = x_n' = 0$. Dann ist die Gleichung $\bar{a}_{rr} x_r' + \bar{a}_{r,r+1} x_{r+1}' + \dots + \bar{a}_{rn} x_n' = \bar{b}_r$ erfüllt. Durch einsetzen in die Gleichung darüber, d.h. in $\bar{a}_{r-1,r-1} x_{r-1}' + \bar{a}_{r-1,r} x_r' + \dots + \bar{a}_{r-1,n} x_n' = \bar{b}_{r-1}$ ergibt sich ein eindeutig bestimmter Wert für x_{r-1}', nämlich $x_{r-1}' = \bar{a}_{r-1,r-1}^{-1} (\bar{b}_{r-1} - \bar{a}_{r-1,r} \cdot \bar{a}_{rr}^{-1} \cdot \bar{b}_r)$. Einsetzen in die $(r-2)$-te Gleichung gibt einen Wert für x_{r-2}' – usw. bis man die erste Zeile erreicht und einen Wert für x_1' erhält.

Finden von $n - \text{Rang}\, \bar{A} = n - r$ l.u. Lösungen $v_1, \dots, v_{n-r}$ des homogenen Gleichungssystems $\bar{A} \cdot x' = 0$, d.h. von

$$\left.\begin{array}{rl} \bar{a}_{11} x_1' + \bar{a}_{12} x_2' + \cdots\cdots & + \bar{a}_{1n} x_n' = 0 \\ \bar{a}_{22} x_2' + \cdots\cdots & + \bar{a}_{2n} x_n' = 0 \\ \ddots \quad & \qquad \vdots \\ \bar{a}_{rr} x_r' + \cdots & + \bar{a}_{rn} x_n' = 0 \end{array}\right\}$$

Um v_1 zu finden, setze $x_{r+1}' = 1$, $x_{r+2}' = \dots = x_n' = 0$. Aus der letzten Gleichung $\bar{a}_{rr} x_r' + \bar{a}_{r,r+1} x_{r+1}' + \dots + \bar{a}_{rn} x_n' = 0$ ergibt sich ein eindeutig bestimmter Wert für x_r', nämlich $x_r' = -\bar{a}_{rr}^{-1} \cdot \bar{a}_{r,r+1}$. Einsetzen in die Gleichung darüber ergibt einen Wert für x_{r-1}' – usw. bis man die erste Gleichung erreicht und einen Wert für x_1' findet.

Um v_2 zu finden, setze $x_{r+1}' = 0$, $x_{r+2}' = 1$, $x_{r+3}' = \dots = x_n' = 0$ und gehe wie bei v_1 vor. Man wiederholt dieses Verfahren, bis man für v_{n-r} schließlich $x_{r+1}' = \dots = x_{n-1}' = 0$, $x_n' = 1$ setzt und analog vorgeht.

Man erhält so die $n-r$ l.u. Lösungen

$$v_1 = \begin{pmatrix} x'_{11} \\ \vdots \\ x'_{1r} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} x'_{21} \\ \vdots \\ x'_{2r} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad v_{n-r} = \begin{pmatrix} x'_{n-r,1} \\ \vdots \\ x'_{n-r,r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von $\bar{A} \cdot x' = \sigma$ und $\{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-r} v_{n-r} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in K\}$ ist die Menge der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\bar{A} \cdot x' = \sigma$.

<u>Beispiel</u>: Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem (mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 = -3 \\ 4x_1 + 12x_2 - 6x_3 - 8x_4 = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{2. Zeile} - 3 \times \text{1. Zeile} \\ \text{3. Zeile} - 4 \times \text{1. Zeile} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ 10x_3 - 20x_4 = -30 \\ 10x_3 - 20x_4 = -30 \end{array}\right\} \text{3. Zeile} - \text{2. Zeile}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 9 \\ 10x_3 - 20x_4 = -30 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \text{Vertausche Reihenfolge von } x_2 \text{ und } x_3$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 4x_3 + 3x_2 + 3x_4 = 9 \\ 10x_3 \qquad\quad - 20x_4 = -30 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$$

Es ist

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 10 & 0 & -20 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $\operatorname{Rang} \bar{A} = \operatorname{Rang} \bar{A}'$, ist das Gleichungssystem lösbar.

Finden einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems:

Setze $x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -3 \Rightarrow x_1 + 12 = 9 \Rightarrow x_1 = -3$, d.h. $x_0 = (-3, 0, -3, 0)^T$

Suche nun $n - \operatorname{Rang} \bar{A} = 4 - 2 = 2$ l.u. Lösungen des homogenen Gleichungssystems

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - 4x_3 + 3x_2 + 3x_4 = 0 \\ 10x_3 \qquad\quad - 20x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

1\. Lösung: Setze $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3$

d.h. $v_1 = (-3, 1, 0, 0)^T$

2\. Lösung: Setze $x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow x_1 - 8 + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$

d.h. $v_2 = (5, 0, 2, 1)^T$

Die Menge aller Lösungen ist daher

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>Satz 75</u> (Cramersche Regel) Es sei $A \in M_n(K)$ invertierbar mit Spaltenvektoren $A^1, \dots, A^n$ und $b \in K^n$. Ist $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ die (eindeutige) Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$, so ist

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det(A^1, \dots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots, A^n) \quad \text{für } 1 \le i \le n.$$

<u>Beweis</u>: Das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ kann auch als $x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b$ angeschrieben werden. Daraus erhält man (für $1 \le i \le n$)

$$\det(A^1, \dots, A^{i-1}, b, A^{i+1}, \dots, A^n) = \det(A^1, \dots, A^{i-1}, x_1 A^1 + \dots + x_n A^n, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \det(A^1, \dots, A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, \dots, A^n) = x_i \cdot \det(A^1, \dots, A^{i-1}, A^i, A^{i+1}, \dots, A^n)$$

$$= x_i \cdot \det A$$

Da $\det A \ne 0$ (nach Korollar 52) folgt sofort die Behauptung.

<u>Beispiel</u>: Zu lösen ist das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -5 \ (\ne 0)$$

$$x = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}$$

$$y = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{5}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$$

Korollar 76 Für $A \in M_n(K)$ sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar,

(ii) $\operatorname{Rang} A = n$,

(iii) Die Zeilen von A sind l.u.,

(iv) Die Spalten von A sind l.u.,

(v) $\det A \neq 0$,

(vi) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar (wobei $b \in K^n$ beliebig ist),

(vii) Die lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^n$, $\varphi(x) = A \cdot x$ ist ein Isomorphismus.

Beweis: (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Wurde in Satz 39 (iv) bewiesen.

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv) Folgt aus der Definition des Rangs einer Matrix, Korollar 33 und Satz 37.

(i) $\Longleftrightarrow$ (v) Wurde in Korollar 52 bewiesen.

(ii) $\Longrightarrow$ (vi) Da $\operatorname{Rang} A = n$, ist A nach Satz 39 (iv) invertierbar und $x = A^{-1} \cdot b$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Wegen Satz 74 (v) ist diese Lösung eindeutig.

(vi) $\Longrightarrow$ (ii) Folgt aus Satz 74 (v).

(i) $\Longrightarrow$ (vii) Die Abbildung φ ist linear nach Satz 59 (i).

Sie ist injektiv, da $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow A \cdot x = A \cdot y \Rightarrow x = A^{-1}Ax = A^{-1}Ay = y$.

Sie ist surjektiv, da $\varphi(A^{-1}x) = AA^{-1}x = x \quad \forall x \in K^n$.

(vii) $\Longrightarrow$ (ii) Ist φ ein Isomorphismus, so ist φ insbesondere surjektiv und nach Korollar 70 (iii) und Lemma 67 ist $n = \dim_K K^n = \operatorname{Rang} \varphi = \operatorname{Rang} A$.