1.9 Reelle Vektorräume mit innerem Produkt

<u>Definition</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt inneres Produkt auf V (oder Skalarprodukt auf V), wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle & \forall u,v,w \in V, \\ 2) & \langle \alpha v, w\rangle = \alpha \langle v,w\rangle & \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v,w \in V, \end{array}\right\} \text{linear (im ersten Argument)}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 3) & \langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle & \forall v,w \in V, \end{array}\right\} \text{symmetrisch}$$

$$\left.\begin{array}{lll} 4) & \langle v,v\rangle > 0 & \forall v \in V\setminus\{0\} \end{array}\right\} \text{positiv definit}$$

<u>Lemma 77</u> Es sei V ein reeller Vektorraum und $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann gelten

$$\left.\begin{array}{lll} (i) & \langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle & \forall u,v,w \in V, \\ (ii) & \langle v, \alpha w\rangle = \alpha \langle v,w\rangle & \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v,w \in V, \end{array}\right\} \text{linear (im zweiten Argument)}$$

$$(iii)\quad \langle 0, v\rangle = \langle v, 0\rangle = 0 \quad \forall v \in V.$$

<u>Beweis</u>: (i) $\langle u, v+w\rangle \overset{3)}{=} \langle v+w, u\rangle \overset{1)}{=} \langle v,u\rangle + \langle w,u\rangle \overset{3)}{=} \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle \ \forall u,v,w \in V$

(ii) $\langle v, \alpha w\rangle \overset{3)}{=} \langle \alpha w, v\rangle \overset{2)}{=} \alpha \langle w,v\rangle \overset{3)}{=} \alpha \langle v,w\rangle \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v,w \in V$

(iii) $\langle 0, v\rangle = \langle 0\cdot 0, v\rangle \overset{2)}{=} 0 \cdot \langle 0,v\rangle = 0 \quad \forall v \in V, \ \langle v,0\rangle = \langle 0,v\rangle = 0 \quad \forall v \in V$

<u>Beispiele</u>: 1) Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Dann ist $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (x_i+y_i) z_i = \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n y_i z_i$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\left\langle \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha x_i) y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, so $\exists j \in \{1,\dots,n\}: x_j \neq 0$ und daher $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq x_j^2 > 0.$

<u>Definition</u>: Das in Beispiel 1) beschriebene Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ wird Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ genannt.

<u>Beispiele</u> (Fortsetzung): 2) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

Dann ist $\langle \cdot,\cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Da $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (x_1\ x_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ (Produkt von drei Matrizen), kann man es,

setzt man $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, kurz $\langle v,w \rangle = v^T \cdot A \cdot w$ schreiben

Für $u,v,w \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\langle u+v,w \rangle = (u+v)^T \cdot A \cdot w = (u^T+v^T) \cdot A \cdot w = u^T \cdot A \cdot w + v^T \cdot A \cdot w = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle,$$

$$\langle \alpha v,w \rangle = (\alpha v)^T \cdot A \cdot w = (\alpha v^T) \cdot A \cdot w = \alpha (v^T \cdot A \cdot w) = \alpha \langle v,w \rangle$$

und $\langle v,w \rangle = v^T \cdot A \cdot w = (v^T \cdot A \cdot w)^T = w^T \cdot A^T \cdot v = w^T \cdot A \cdot v = \langle w,v \rangle$,

da A symmetrisch ist (d.h. $A^T = A$). Schließlich ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \implies (2x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 = 0 \implies 2x_1 - x_2 = x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0.$$

3) Ist V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ und $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ eine Basis von V, so kann man auf V durch $(v,w) := \langle [v]_B, [w]_B \rangle$ ein Skalarprodukt definieren (wobei $\langle \cdot,\cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet). Denn wenn $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ für $\alpha_1,\dots,\alpha_n, \beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$ und daher $[v]_B = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)^T$ und $[w]_B = (\beta_1,\dots,\beta_n)^T$, so ist $(v,w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$.

4) Auf $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch $\langle A,B \rangle = \mathrm{Spur}(A^T \cdot B)$ (für $A,B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$) ein Skalarprodukt definiert. (Die Spur einer quadratischen Matrix wurde in den Übungen vor Beispiel 11 definiert.)

5) Es seien $a < b$ reelle Zahlen und $V = C([a,b])$. Dann ist durch $\langle f,g \rangle := \int_a^b f(x) g(x)\,dx$ ein Skalarprodukt auf V definiert:

$$\langle f+g,h \rangle := \int_a^b (f+g)(x) \cdot h(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+g(x)) \cdot h(x)\,dx = \int_a^b (f(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h(x))\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle \quad \forall f,g,h \in C([a,b])$$

$$\langle \alpha f, g\rangle = \int_a^b (\alpha f)(x)\cdot g(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x) g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \alpha \langle f,g\rangle$$

für alle $f,g \in C([a,b])$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle \quad \forall f,g \in C([a,b])$$

Um zu zeigen, dass auch Bedingung 4) erfüllt ist, holen wir etwas weiter aus:

Ist $f \in C([a,b])$, $f \geq 0$ und $\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) > 0$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Da f stetig ist, gibt es zu $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ ein $\delta > 0$, derart dass die Bedingung $|x - x_0| < \delta$, $x \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ erfüllt ist. Für $x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt aus $\frac{f(x_0)}{2} > |f(x) - f(x_0)| \geq f(x_0) - f(x)$, dass $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Setzt man $I := [a,b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, so ist I ein Intervall positiver Länge $|I|$ und $\int_a^b f(x)\,dx \geq |I| \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0$.

Ist nun $f \in C([a,b])$ und $f \neq 0$, so $\exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) \neq 0$. Da $f^2 \geq 0$ und $(f(x_0))^2 > 0$ folgt aus dem oben Bewiesenen $\langle f,f\rangle = \int_a^b (f(x))^2\,dx > 0$.

<u>Definition</u>: Ein reeller Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ wird euklidischer Vektorraum genannt.

17.11.2021

<u>Satz 78</u> (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle \cdot,\cdot \rangle$. Dann gilt

$$|\langle v,w\rangle|^2 \leq \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle \quad \forall v,w \in V.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann wenn v und w l.a. sind.

<u>Beweis</u>: Ist $w = o$, so $\langle v,w\rangle = \langle w,w\rangle = 0$ wegen Lemma 77 (iii) und daher $|\langle v,w\rangle|^2 = 0 = \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$.

Sei nun $w \neq o$, woraus nach Voraussetzung $\langle w,w\rangle > 0$ folgt. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist (nach Definition des inneren Produkts und Lemma 77 (i) und (ii))

$$0 \leq \langle v - \alpha w, v - \alpha w\rangle = \langle v,v\rangle - \alpha\langle v,w\rangle - \alpha\langle w,v\rangle + \alpha^2\langle w,w\rangle$$
$$= \langle v,v\rangle - 2\alpha\langle v,w\rangle + \alpha^2\langle w,w\rangle.$$

Setzt man $\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}$, so erhält man daraus

$0 \le \langle v,v\rangle - 2\dfrac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle} + \dfrac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle} = \langle v,v\rangle - \dfrac{\langle v,w\rangle^2}{\langle w,w\rangle}$, woraus sofort

$0 \le \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle - \langle v,w\rangle^2$ und $|\langle v,w\rangle|^2 = \langle v,w\rangle^2 \le \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$ folgt.

Ist $|\langle v,w\rangle|^2 = \langle v,w\rangle^2 = \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$, so folgt aus der Definition des Skalarprodukts und der obigen Argumentation, dass entweder $w = \sigma$ oder $\sigma = v - \alpha w = v - \dfrac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle} w$ gelten muss. In beiden Fällen sind v und w l.a.

Sind umgekehrt v und w l.a., so ist entweder $w = \sigma$ oder $\exists \alpha \in \mathbb{R} : v = \alpha w$ (wegen Lemma 25). In diesem Fall ist

$\langle v,w\rangle^2 = \langle \alpha w, w\rangle^2 = \alpha^2 \langle w,w\rangle^2 = (\alpha^2 \langle w,w\rangle)\cdot\langle w,w\rangle = \langle v,v\rangle \cdot \langle w,w\rangle$.

<u>Beispiele</u>: 1) Für das Standardskalarprodukt $\langle (x_1,\dots,x_n)^T, (y_1,\dots,y_n)^T\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ auf $\mathbb{R}^n$ erhält man $(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + \dots + x_n^2)\cdot(y_1^2 + \dots + y_n^2)$.

2) Insbesondere erhält man für $\binom{x_1}{y_1}, \binom{x_2}{y_2} \in \mathbb{R}^2$ die Ungleichung $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ bzw. für $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Ungleichung

$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$.

3) Für das in Beispiel 5) oben beschriebene Skalarprodukt $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ auf dem Vektorraum $C([a,b])$ erhält man die Ungleichung

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right).$$

<u>Definition</u>: Es sei V ein reeller Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ eine Abbildung, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) $\|v\| \ge 0 \ \forall v \in V$ und $\|v\| = 0 \iff v = \sigma$,

2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$,

3) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\| \ \forall v,w \in V$ (Dreiecksungleichung)

Dann wird $\|v\|$ als Norm von $v \in V$ und V als normierter Vektorraum bezeichnet.

<u>Satz 79</u> Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}\ \forall v \in V$ eine Norm auf V definiert

Beweis: Für $v = 0$ ist $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{0} = 0$. Für $v \neq 0$ ist $\langle v,v\rangle > 0$ und daher $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} > 0$.

$$\|\alpha v\| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v,v\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle v,v\rangle} = |\alpha| \cdot \sqrt{\langle v,v\rangle} = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$$

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$
$$= \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2$$

Aus Satz 78 folgt $\langle v,w\rangle \leq |\langle v,w\rangle| \leq \sqrt{\langle v,v\rangle} \cdot \sqrt{\langle w,w\rangle} = \|v\| \cdot \|w\|$ und daher $\|v+w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.

Durch Wurzelziehen erhält man $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Bemerkungen: 1) Ist V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle \cdot,\cdot \rangle$ und die Norm $\|\cdot\|$ auf V durch $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ $\forall v \in V$ definiert, so sagt man, $\|\cdot\|$ werde durch $\langle \cdot,\cdot\rangle$ induziert.

2) Man kann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (Satz 78) mit Hilfe der Norm formulieren als $|\langle v,w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ $\forall v,w \in V$.

3) Es gibt normierte Vektorräume, deren Norm nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird. Z.B. ist auf $\mathbb{R}^n$ auch durch $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ eine Norm gegeben, die nicht durch ein Skalarprodukt induziert wird.

Lemma 80 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot,\cdot\rangle$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm. Dann ist $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v-w\|$ $\forall v,w \in V$.

Beweis: $\|v\| = \|(v-w)+w\| \leq \|v-w\| + \|w\|$ und daher $\|v\| - \|w\| \leq \|v-w\|$.

Aus Symmetriegründen gilt $\|w\| - \|v\| \leq \|w-v\| = \|(-1)(v-w)\| = |-1| \cdot \|v-w\| = \|v-w\|$.

Satz 81 (Cosinussatz) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit inneren Produkt $\langle \cdot \rangle$ und $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm. Dann ist

$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle \quad \forall v,w \in V.$$

Beweis: $\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle - 2\langle v,w\rangle$

$$= \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle$$

Definition: Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot,\cdot\rangle$. Zwei Vektoren $v,w \in V$ heißen orthogonal wenn $\langle v,w\rangle = 0$.

Korollar 82 (Satz des Pythagoras) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sowie $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm und $v,w\in V$ orthogonal. Dann ist
$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\langle v,w\rangle = 0$. Aus Satz 81 folgt
$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v,w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Bemerkungen: 1) Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (Satz 78) folgt sofort $-\|v\|\cdot\|w\| \le \langle v,w\rangle \le \|v\|\cdot\|w\|$ $\forall v,w\in V$. Sind dabei $v,w\neq \sigma$, so kann man das zu $-1\le \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}\le 1$ umformen und es gibt einen eindeutig bestimmten Winkel $\alpha\in[0,\pi]$ mit der Eigenschaft $\cos\alpha = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$.

2) Setzt man $\cos(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$ für $v,w\in V\setminus\{\sigma\}$, so kann man in jedem euklidischen Vektorraum den Winkel zwischen zwei Vektoren definieren. Ist $V=\mathbb{R}^2$ oder $V=\mathbb{R}^3$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet das Standardskalarprodukt, so ist $\cos(v,w)$ tatsächlich der Cosinus des von den Vektoren v und w eingeschlossenen Winkels.

3) Für $v,w\in V\setminus\{\sigma\}$ kann man das innere Produkt nun umschreiben zu $\langle v,w\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos(v,w)$. Etwas schlampig lässt man diese Gleichung auch für $v=\sigma$ (oder $w=\sigma$) gelten, da dann $\langle v,w\rangle = \|v\| = 0$ (oder $\langle v,w\rangle = \|w\| = 0$) gilt – auch wenn $\cos(v,w)$ in diesem Fall nicht vernünftig definiert ist. Der Cosinussatz (Satz 81) wird dann zu $\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\cdot\|w\|\cdot\cos(v,w)$. Für $V=\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt erhält man den klassischen Cosinussatz.

4) Zwei Vektoren $v,w\in V\setminus\{\sigma\}$ sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v,w\rangle = 0 \Leftrightarrow \cos(v,w)=0$ $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (wobei $\alpha\in[0,\pi]$ durch $\cos\alpha = \cos(v,w) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$ festgelegt ist).

Ist $V=\mathbb{R}^2$ oder $V=\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt, so entspricht dieser Orthogonalitätsbegriff genau unserer üblichen geometrischen Vorstellung. Ebenso erhält man für $V=\mathbb{R}^2$ (mit dem Standardskalarprodukt) den klassischen Satz des Pythagoras.

Definition: Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Ein Vektor $v \in V$ heißt normiert (oder Einheitsvektor) wenn $\|v\| = 1$.

Bemerkung: Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so ist $\frac{1}{\|v\|} \cdot v$ normiert, da $\left\| \frac{1}{\|v\|} \cdot v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \cdot \|v\| = 1$.

Korollar 83 Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Dann gelten

(i) $\forall v, w \in V: \|v - w\| \geq 0$ und $\|v - w\| = 0 \Leftrightarrow v = w$,

(ii) $\forall v, w \in V: \|v - w\| = \|w - v\|$,

(iii) $\forall u, v, w \in V: \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$ (Dreiecksungleichung).

Beweis: Alle Teile folgen rasch aus Satz 79. Insbesondere ist

$\|v - w\| = 0 \Leftrightarrow v - w = 0 \Leftrightarrow v = w$, $\|v - w\| = \|(-1)(w - v)\| = |-1| \cdot \|w - v\| = \|w - v\|$

und $\|u - w\| = \|(u - v) + (v - w)\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$.