2. Teil: Reelle Analysis in mehreren Veränderlichen

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^k$ mit Standardskalarprodukt und davon induzierter Norm betrachten, allerdings mit leicht veränderten Notation, genauer:

- $\mathbb{R}^k = \{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \mid x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R} \}$ (dabei ist im Folgenden stets $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

  Wir werden normalerweise nicht mehr genau zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren unterscheiden. Im Zweifelsfall sind alle Vektoren Spaltenvektoren (auch wenn es nicht genau notiert ist),
- Sind $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, so ist $\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$,
- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, so ist $\lambda \underline{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_k)$,
- Sind $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$, so ist $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_k y_k$,
- Ist $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, so ist $\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$,
- Die Standardbasis des $\mathbb{R}^k$ bezeichnen wir mit $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_k$, d.h.

  $\underline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\underline{e}_k = (0, \dots, 0, 1)$.

  Die Elemente der Standardbasis sind normiert (d.h. $\|\underline{e}_i\| = 1$ für $1 \le i \le k$) und orthogonal (d.h. $\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = 0$ für $1 \le i, j \le k$, $i \ne j$). Für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ gilt die (eindeutige) Darstellung $\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + \dots + x_k \underline{e}_k = \sum_{i=1}^{k} x_i \underline{e}_i$.

2.1 Folgen im $\mathbb{R}^k$

Definition: Eine Abbildung $\mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^k$ (oder auch $\mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^k$) heißt Folge im $\mathbb{R}^k$. Wir schreiben dafür $(\underline{x}_n)_{n \ge 1}$ (bzw. $(\underline{x}_n)_{n \ge 0}$). Sollen die einzelnen Komponenten von $\underline{x}_n$ beschrieben werden, so schreiben wir dafür $\underline{x}_n = (x_{n1}, \dots, x_{nk})$.

Definition: Man sagt, eine Folge $(\underline{x}_n)_{n \ge 1}$ im $\mathbb{R}^k$ konvergiert gegen $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ wenn $\lim_{n \to \infty} \|\underline{x}_n - \underline{a}\| = 0$. Man schreibt dafür $\underline{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \underline{a}$ oder $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{a}$.

Bemerkung: Diese Definition führt die Konvergenz einer Folge im Mehrdimensionalen auf die Konvergenz im Eindimensionalen zurück, die man schon kennen muss. Man könnte natürlich auch definieren: Die Folge $(\underline{x}_n)_{n \ge 1}$ konvergiert gegen $\underline{a}$ wenn $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \forall n \ge N : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon$.

22.11.2021

Satz 84 Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1} = (x_{n1},\dots,x_{nk})_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}^k$ und $\underline{a}=(a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{R}^k$. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x_{ni} = a_i$ für $1\leq i\leq k$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon>0$. Dann $\exists N\geq 1$, sodass $\|\underline{x}_n-\underline{a}\|<\varepsilon\ \forall n\geq N$ und daher $0\leq |x_{ni}-a_i|\leq \sqrt{\sum_{j=1}^k |x_{nj}-a_j|^2} = \|\underline{x}_n-\underline{a}\|<\varepsilon$ für $1\leq i\leq k$ und $n\geq N$, dh $x_{ni}\xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$ für $1\leq i\leq k$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\varepsilon>0$. Dann $\exists N_1,\dots,N_k\geq 1$, sodass $|x_{ni}-a_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ für $n\geq N_i$.

Für $n\geq \max\{N_1,\dots,N_k\}$ gilt dann

$$0\leq \|\underline{x}_n-\underline{a}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k |x_{nj}-a_j|^2} < \sqrt{k\cdot\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon,$$

dh $\underline{x}_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\underline{a}$.

Satz 85 (Cauchy-Kriterium) Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathbb{R}^k$. Dann sind äquivalent:

(i) $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ konvergiert,

(ii) $\forall\varepsilon>0\ \exists N\geq 1\ \forall n,m\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\underline{a}:=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x}_n$ und $\varepsilon>0$. Nach Voraussetzung $\exists N\geq 1\ \forall n\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{a}\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Daraus erhält man

$$\|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|\leq \|\underline{x}_n-\underline{a}\|+\|\underline{a}-\underline{x}_m\| = \|\underline{x}_n-\underline{a}\|+\|\underline{x}_m-\underline{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad \forall n,m\geq N.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $1\leq i\leq k$ und $\varepsilon>0$. Dann $\exists N\geq 1\ \forall n,m\geq N: \|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon$. Daraus folgt $|x_{ni}-x_{mi}|\leq\|\underline{x}_n-\underline{x}_m\|<\varepsilon\ \forall n,m\geq N$, dh $(x_{ni})_{n\geq 1}$ ist eine (eindimensionale) Cauchyfolge. Daraus folgt, dass $(x_{ni})_{n\geq 1}$ konvergiert. Da $i\in\{1,\dots,k\}$ beliebig war, folgt aus Satz 84, dass $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Satz 86 Es seien $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ und $(\underline{y}_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente Folgen im $\mathbb{R}^k$, $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x}_n=\underline{a}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\underline{y}_n=\underline{b}$. Dann gelten

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\underline{x}_n+\underline{y}_n)=\underline{a}+\underline{b}$ (dh $\lim\limits_{n\to\infty}(\underline{x}_n+\underline{y}_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{x}_n+\lim\limits_{n\to\infty}\underline{y}_n$),

(ii) $\lim_{n\to\infty} (\lambda \underline{x}_n) = \lambda \underline{a}$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} (\lambda \underline{x}_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$) für $\lambda \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{n\to\infty} \langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n, \lim_{n\to\infty} \underline{y}_n \rangle$),

(iv) $\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n\| = \|\underline{a}\|$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n\| = \|\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n\|$)

Beweis: Aus $\underline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{a}$ und $\underline{y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{b}$ folgt wegen Satz 84, dass $x_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i$ und $y_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} b_i$ für $1 \le i \le k$. Auf diese komponentenweisen Aussagen kann man nun die entsprechenden Resultate aus der eindimensionalen reellen Analysis anwenden:

(i) Für $1 \le i \le k$ folgt $x_{ni} + y_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i + b_i$ und (wegen Satz 84) $\underline{x}_n + \underline{y}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{a} + \underline{b}$.

(ii) Für $1 \le i \le k$ folgt $\lambda x_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda a_i$ und daher (wegen Satz 84) $\lambda \underline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \underline{a}$.

(iii) Für $1 \le i \le k$ folgt $x_{ni} y_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} a_i b_i$ und daraus

$$\langle \underline{x}_n, \underline{y}_n \rangle = \sum_{i=1}^{k} x_{ni} y_{ni} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle.$$

(iv) Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion ist

$$\lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\langle \underline{x}_n, \underline{x}_n \rangle} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \langle \underline{x}_n, \underline{x}_n \rangle} \overset{(iii)}{=} \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a} \rangle} = \|\underline{a}\|.$$

Definition: Eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\ge 1}$ im $\mathbb{R}^k$ heißt beschränkt, wenn es ein $R > 0$ gibt, derart dass $\|\underline{x}_n\| \le R \;\forall n \ge 1$.

Satz 87 (mehrdimensionaler Satz von Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Es sei $(\underline{x}_n)_{n\ge 1}$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^k$.

Falls $k=1$, ist die Behauptung gerade der eindimensionale Satz von Bolzano-Weierstraß, den wir als bekannt voraussetzen.

Es sei nun $k > 1$, $1 < l \le k$ und es sei schon bewiesen, dass die $(l-1)$-dimensionale, (ebenfalls) beschränkte Folge $(x_{n1}, \dots, x_{n,l-1})_{n\ge 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_\alpha 1}, \dots, x_{n_\alpha, l-1})_{\alpha \ge 1}$ besitzt

Wir betrachten die eindimensionale, beschränkte Folge $(x_{n_\alpha,l})_{\alpha\geq 1}$. Nach dem eindimensionalen Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt sie eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{\alpha_\beta},l})_{\beta\geq 1}$. Dann ist $(x_{n_{\alpha_\beta},1}, \dots, x_{n_{\alpha_\beta},l-1}, x_{n_{\alpha_\beta},l})_{\beta\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge von $(x_{n1}, \dots, x_{n,l-1}, x_{nl})_{n\geq 1}$. Verfahre weiter so bis $l=k$ erreicht ist, d.h. eine konvergente Teilfolge von $(\underline{x}_n)_{n\geq 1} = (x_{n1}, \dots, x_{nk})_{n\geq 1}$ gefunden wurde.