2.10 Der Satz von Fubini

Vorbemerkung: Uns fehlt noch ein Verfahren zur Berechnung mehrdimensionaler Integrale. Diese erfolgt üblicherweise durch Zurückführen auf den eindimensionalen Fall wie im folgenden Beispiel: Ist $Q = [0,1] \times [0,2]$ und $f : Q \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + xy$, so ist

$$\int_Q (x^2+xy)\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x^2+xy)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{2} x y^2 \right]_{y=0}^{2} dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\, dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

Der Satz von Fubini besagt, dass diese Vorgangsweise gerechtfertigt ist.

Satz 139 (Satz von Fubini) Es seien $P \subseteq \mathbb{R}^k$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^l$ Quader (und daher $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ ebenfalls ein Quader) und $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. (Wir verwenden die Notation $\underline{x} \in P$, $\underline{y} \in Q$ und $f : P \times Q \to \mathbb{R}$, $(\underline{x}, \underline{y}) \mapsto f(\underline{x}, \underline{y})$. Die letzte Voraussetzung besagt also, dass $\int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\, d(\underline{x},\underline{y})$ existiert.) Weiters möge

$\int_P f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}$ für alle $\underline{y} \in Q$ existieren. Dann ist die Abbildung

$Q \to \mathbb{R}$, $\underline{y} \mapsto \int_P f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}$ ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\, d(\underline{x},\underline{y}) = \int_Q \left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x} \right) d\underline{y}.$$

Beweis: Aus Zerlegungen Z_1 bzw. Z_2 von P bzw. Q in Teilquader $P_1, \dots, P_n$ bzw. $Q_1, \dots, Q_m$ ergibt sich eine Zerlegung Z von $P \times Q$ in Teilquader $P_i \times Q_j$ (mit $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$). Für $\underline{y} \in Q_j$ ist

$$\inf_{(\underline{\xi},\underline{\zeta}) \in P_i \times Q_j} f(\underline{\xi},\underline{\zeta}) \cdot v(P_i) \le \inf_{\underline{\xi} \in P_i} f(\underline{\xi},\underline{y}) \cdot v(P_i) \le \int_{P_i} f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}.$$

und daher

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\underline{\xi},\underline{\zeta}) \in P_i \times Q_j} f(\underline{\xi},\underline{\zeta}) \cdot v(P_i) \le \sum_{i=1}^{n} \int_{P_i} f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x} = \int_P f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}.$$

(Die Existenz des Integrals $\int_{P_i} f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}$ und die Gültigkeit der Gleichung $\sum_{i=1}^{n} \int_{P_i} f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x} = \int_P f(\underline{x},\underline{y})\, d\underline{x}$ müssten begründet werden. Wir verzichten darauf aus Zeitgründen.)

Daraus erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i\times Q_j) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i)\cdot v(Q_j)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i)\right)\cdot v(Q_j) \overset{\text{Lemma 134}}{=} \int_{Q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i)\right)d\underline{y}$$

$$= \underline{\int}_{Q_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i)\right)d\underline{y} \leq \underline{\int}_{Q_j}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y}$$

und somit

$$U(f,Z) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \inf_{(\xi,\zeta)\in P_i\times Q_j} f(\xi,\zeta)\cdot v(P_i\times Q_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \underline{\int}_{Q_j}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} = \underline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y}.$$

(Auch die Korrektheit der letzten Gleichung müsste begründet werden.)

Da Z eine beliebige Zerlegung von $P\times Q$ war, folgt

$$\int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\,d(\underline{x},\underline{y}) = \sup_Z U(f,Z) \leq \underline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y}.$$

Mit Hilfe von Obersummen zeigt man analog

$$\overline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} \leq \int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\,d(\underline{x},\underline{y}).$$

Insgesamt gilt also

$$\int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\,d(\underline{x},\underline{y}) \leq \underline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} \leq \overline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} \leq \int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\,d(\underline{x},\underline{y}).$$

Daher ist

$$\underline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} = \overline{\int}_{Q}\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y}.$$

Nach Satz 131 existiert also $\int_Q\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y}$ und

$$\int_Q\left(\int_P f(\underline{x},\underline{y})\,d\underline{x}\right)d\underline{y} = \int_{P\times Q} f(\underline{x},\underline{y})\,d(\underline{x},\underline{y}).$$

Bemerkungen: 1) Der einfachste Spezialfall des Satzes von Fubini sieht folgendermaßen aus: Ist $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, existiert $\int_c^d f(x,y)\,dy$ für alle $x\in[a,b]$ und existiert $\int_a^b f(x,y)\,dx$ für alle $y\in[c,d]$, so ist

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

2) Die dabei auftretenden Ausdrücke $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ und $\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$ werden iterierte Integrale genannt.

3) Insbesondere ist damit die Korrektheit des Beispiels am Beginn des Abschnitts nachträglich bewiesen worden.

4) Die Voraussetzungen des Satzes von Fubini sind nach Satz 133 erfüllt, wenn $f:P\times Q\to\mathbb{R}$ stetig ist.

5) Ist $Q=\prod_{i=1}^k[a_i,b_i]$ ein Quader und $f:Q\to\mathbb{R}$ stetig, so kann man den Satz von Fubini mehrmals anwenden und $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$ folgendermaßen berechnen:

$$\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(x_1,\dots,x_k)\,d(x_1,\dots,x_k)$$

$$= \int_{a_k}^{b_k}\left(\int_{a_{k-1}}^{b_{k-1}}\cdots\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\right)dx_2\cdots dx_{k-1}\right)dx_k$$

Dabei kann die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauscht werden (und eine geschickte Wahl der Reihenfolge kann die Berechnung manchmal stark vereinfachen).

6) Die Klammern zwischen den iterierten Integralen werden in der Praxis meistens weggelassen.

7) In der Physik werden Integralzeichen und dazugehöriges dx_i oft zusammen geschrieben, als

$$\int_Q d\underline{x}\, f(\underline{x}) = \int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2\cdots\int_{a_k}^{b_k}dx_k\, f(x_1,\dots,x_k).$$

Das ist praktisch, aber in der Mathematik nicht üblich.

Beispiele: 1) Ist $f:[0,1]^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xyz$, so ist

$$\int_{[0,1]^3} xyz\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^1 dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\left(\frac{1}{2}yz\right)dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 yz\,dy\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{2}y^2z\right]_{y=0}^1 dz = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}z\right)dz = \frac{1}{4}\int_0^1 z\,dz = \frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

19.1.2022

2) Ist $Q = [-1,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]$ und $f: Q\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x\sin y - ye^x$, so ist

$$\int_Q (x\sin y - ye^x)\,d(x,y) = \int_0^{\pi/2}\int_{-1}^{1}(x\sin y - ye^x)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\left[\frac{x^2}{2}\sin y - ye^x\right]_{x=-1}^{1} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\frac12 \cancel{\sin y} - ey - \frac12 \cancel{\sin y} + \frac1e y\right)dy = \int_0^{\pi/2}\left(\frac1e - e\right)y\,dy = \left[\frac12\left(\frac1e - e\right)y^2\right]_{y=0}^{\pi/2} = \left(\frac1e - e\right)\frac{\pi^2}{8}$$

oder

$$\int_Q (x\sin y - ye^x)\,d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_0^{\pi/2}(x\sin y - ye^x)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\left[-x\cos y - \frac12 y^2 e^x\right]_{y=0}^{\pi/2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(0 - \frac{\pi^2}{8}e^x + x + 0\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(x - \frac{\pi^2}{8}e^x\right)dx = \left[\frac12 x^2 - \frac{\pi^2}{8}e^x\right]_{x=-1}^{1}$$

$$= \cancel{\frac12} - \frac{\pi^2}{8}e - \cancel{\frac12} + \frac{\pi^2}{8}\frac1e = \frac{\pi^2}{8}\left(\frac1e - e\right)$$

<u>Definition (Erinnerung)</u>: Es sei $A\subseteq\mathbb{R}^k$. Dann bezeichnet man

$$1_A: \mathbb{R}^k\to\mathbb{R},\quad 1_A(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \underline{x}\in A \\ 0 & \text{falls } \underline{x}\in\mathbb{R}^k\setminus A \end{cases}$$

als charakteristische Funktion von A.

<u>Definition</u>: Es sei $A\subseteq\mathbb{R}^k$ eine beschränkte Menge und $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A\subseteq Q$. Man sagt, A besitze Jordan-Inhalt $v(A)$, wenn $\int_Q 1_A(\underline{x})\,d\underline{x}$ existiert (d.h. wenn die Einschränkung $1_A: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist) und setzt $v(A) := \int_Q 1_A(\underline{x})\,d\underline{x}$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Ist $A\subseteq\mathbb{R}^k$ beschränkt, so existiert stets ein Quader $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft $A\subseteq\mathbb{R}^k$ (siehe Übungsbeispiel 80).

2) Die letzte Definition hängt nicht von der Wahl von Q ab. (Sind $Q_1, Q_2\subseteq\mathbb{R}^k$ zwei Quader, die beide $A\subseteq Q_1$ bzw. $A\subseteq Q_2$ erfüllen, so ist ja $1_A(\underline{x}) = 0\ \forall \underline{x}\in(Q_1\setminus Q_2)\cup(Q_2\setminus Q_1)$.)

3) Ist $A\subseteq\mathbb{R}^k$ ein Quader, so besitzt A Jordan-Inhalt und $v(A)$ stimmt mit der Definition auf Seite 136 überein. (Man kann in diesem Fall $Q = A$ wählen und es ist $1_A(\underline{x}) = 1\ \forall\underline{x}\in Q$.)

<u>Lemma 140</u> Die Mengen $A, B\subseteq\mathbb{R}^k$ mögen beide Jordan-Inhalt besitzen. Dann gelten:

(i) Ist $A\subseteq B$, so ist $v(A)\leq v(B)$,

(ii) $A \cap B$ besitzt ebenfalls Jordan-Inhalt,

(iii) $A \setminus B$ besitzt ebenfalls Jordan-Inhalt,

(iv) $A \cup B$ besitzt ebenfalls Jordan-Inhalt und $v(A \cup B) \leq v(A) + v(B)$

<u>Beweis:</u> Da A und B beides beschränkte Mengen sind, ist auch $A \cup B$ eine beschränkte Menge. Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A \cup B \subseteq Q$.

(i) Aus $A \subseteq B$ folgt sofort $1_A(\underline{x}) \leq 1_B(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in Q$ und daher

$$v(A) = \int_Q 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} \overset{\text{Satz 137 (ii)}}{\leq} \int_Q 1_B(\underline{x})\, d\underline{x} = v(B).$$

(ii) Es ist auch $A \cap B \subseteq Q$ und $1_{A \cap B}(\underline{x}) = 1_A(\underline{x}) \cdot 1_B(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in Q$. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von $1_A : Q \to \mathbb{R}$, der Riemann-Integrierbarkeit von $1_B : Q \to \mathbb{R}$ und Satz 136 (iv) folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $1_{A \cap B} : Q \to \mathbb{R}$.

(iii) Es ist $1_{A \setminus B}(\underline{x}) = 1_A(\underline{x}) - 1_{A \cap B}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in Q$. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von $1_A : Q \to \mathbb{R}$ und $1_{A \cap B} : Q \to \mathbb{R}$ (vgl. (ii)) und Satz 135 folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $1_{A \setminus B} : Q \to \mathbb{R}$.

(iv) Es ist $1_{A \cup B}(\underline{x}) = 1_A(\underline{x}) + 1_B(\underline{x}) - 1_{A \cap B}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in Q$. Aus der Riemann-Integrierbarkeit von $1_A : Q \to \mathbb{R}$, $1_B : Q \to \mathbb{R}$ und $1_{A \cap B} : Q \to \mathbb{R}$ (vgl. (ii)) folgt die Riemann-Integrierbarkeit von $1_{A \cup B} : Q \to \mathbb{R}$ und

$$v(A \cup B) = \int_Q 1_{A \cup B}(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q \left(1_A(\underline{x}) + 1_B(\underline{x}) - 1_{A \cap B}(\underline{x})\right) d\underline{x}$$

$$\overset{\text{Satz 135}}{=} \int_Q 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_Q 1_B(\underline{x})\, d\underline{x} - \int_Q 1_{A \cap B}(\underline{x})\, d\underline{x} = v(A) + v(B) - \underbrace{v(A \cap B)}_{\geq 0} \leq v(A) + v(B).$$

<u>Definition:</u> Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze Jordan-Inhalt, $f : A \to \mathbb{R}$ sei beschränkt und $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ sei ein Quader mit $A \subseteq Q$. Man sagt, f sei auf A Riemann-integrierbar, wenn $\int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x}$ existiert und setzt in diesem Fall $\int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} := \int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x}$.

<u>Bemerkungen:</u> 1) Der Integrand in dieser Definition ist genauer

$$f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & \text{falls } \underline{x} \in A \\ 0 & \text{falls } \underline{x} \in Q \setminus A \end{cases}$$

d.h. man setzt $f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x}) = 0$ auch wenn f in $\underline{x} \in Q \setminus A$ nicht definiert sein sollte.

2) Auch diese Definition hängt nicht von der Wahl von Q ab.

Korollar 141 (Linearität des Riemann-Integrals)
Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze Jordan-Inhalt, $f, g: A \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:
(i) Die Funktion $f+g: A \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar und

$$\int_A (f+g)(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_A g(\underline{x})\, d\underline{x},$$

(ii) Die Funktion $cf: A \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar und

$$\int_A (cf)(\underline{x})\, d\underline{x} = c \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Beweis: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A \subseteq Q$.

(i) $$\int_A (f+g)(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q (f(\underline{x})+g(\underline{x})) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q \left(f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x}) + g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\right) d\underline{x}$$

$$\overset{\text{Satz 135(i)}}{=} \int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} + \int_A g(\underline{x})\, d\underline{x}$$

(ii) $$\int_A (cf)(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q \left(c f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\right) d\underline{x} \overset{\text{Satz 135(ii)}}{=} c \int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} = c \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Korollar 142 Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze Jordan-Inhalt und $f, g: A \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar. Dann gelten:
(i) Die Funktion $|f|: A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto |f(\underline{x})|$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar,
(ii) Die Funktion $f \cdot g: A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar,
(iii) Die beiden Funktionen $\max\{f, g\}: A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \max\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}$ und $\min\{f, g\}: A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \min\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar.

Beweis: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A \subseteq Q$.
(i) Nach Voraussetzung ist die Funktion $Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})$ Riemann-integrierbar. Nach Satz 136 (ii) ist daher auch die Funktion
$Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto |f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})| = |f(\underline{x})| \cdot |1_A(\underline{x})| = |f(\underline{x})| \cdot 1_A(\underline{x})$ Riemann-integrierbar (denn $|1_A(\underline{x})| = 1_A(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in Q$). Das besagt aber gerade, dass die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto |f(\underline{x})|$ Riemann-integrierbar ist.

(ii) Nach Voraussetzung sind die beiden Funktionen $Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})$ und $Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})$ Riemann-integrierbar. Nach Satz 136 (iv) ist daher auch die Funktion

$$Q \to \mathbb{R},\ \underline{x} \mapsto (f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})) \cdot (g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})) = f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x}) \cdot (1_A(\underline{x}))^2 = (f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})) \cdot 1_A(\underline{x})$$

Riemann-integrierbar (denn $(1_A(\underline{x}))^2 = 1_A(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in Q$). Das besagt aber gerade, dass die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ Riemann-integrierbar ist.

(iii) Folgt aus Korollar 141, (i) und den beiden Darstellungen

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad \text{und} \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$

Korollar 143 (Monotonie des Riemann-Integrals)

Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze Jordan-Inhalt und $f, g : A \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar. Dann folgt aus $f \geq g$, dass $\int_A g(\underline{x})\, d\underline{x} \leq \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}$.

Insbesondere gilt: Ist $f \geq 0$, so ist $\int_A f(\underline{x})\, d\underline{x} \geq 0$.

Beweis: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A \subseteq Q$. Dann ist auch $g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in Q$ und daher

$$\int_A g(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_Q g(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} \overset{\text{Satz 137 (ii)}}{\leq} \int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

Den Zusatz erhält man im Spezialfall $g(\underline{x}) = 0\ \forall \underline{x} \in A$.

Korollar 144 (Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale)

Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze Jordan-Inhalt und $f : A \to \mathbb{R}$ sei Riemann-integrierbar. Dann gilt $\left|\int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}\right| \leq \int_A |f(\underline{x})|\, d\underline{x}$.

Beweis: Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader mit der Eigenschaft $A \subseteq Q$. Dann ist

$$\left|\int_A f(\underline{x})\, d\underline{x}\right| = \left|\int_Q f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x}\right| \overset{\text{Satz 138}}{\leq} \int_Q |f(\underline{x}) \cdot 1_A(\underline{x})|\, d\underline{x}$$

$$= \int_Q |f(\underline{x})| \cdot |1_A(\underline{x})|\, d\underline{x} = \int_Q |f(\underline{x})| \cdot 1_A(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A |f(\underline{x})|\, d\underline{x}.$$

Definition: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bezüglich der x-Achse, wenn es reelle Zahlen $a < b$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\varphi \leq \psi$ gibt, derart dass

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}.$$

Bemerkung: Man kann relativ leicht zeigen, dass ein Normalbereich bezüglich der x-Achse stets Jordan-Inhalt besitzt.

Korollar 145 Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der x-Achse und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$.

Beweis: Es sei $c := \min_{a \leq x \leq b} \varphi(x)$ und $d := \max_{a \leq x \leq b} \psi(x)$. Dann ist

$A \subseteq [a,b] \times [c,d]$ und

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) \cdot 1_A(x,y)\, d(x,y) \overset{\text{Satz 139}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \cdot 1_A(x,y)\, dy \right) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Definition: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich bezüglich der y-Achse, wenn es reelle Zahlen $c < d$ und stetige Funktionen $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\varphi \leq \psi$ gibt, derart dass

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

Korollar 146 Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich der y-Achse und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt $\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$.

Beweis: Analog zum Beweis von Korollar 145.

Beispiel: Es sei

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq \sqrt{y} \}$$

(d.h. A ist Normalbereich sowohl bezüglich der x-Achse als auch bezüglich der y-Achse) und $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 y$. Dann ist (nach Korollar 145)

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} x^3 y\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^3 y^2 \right]_{y=x^2}^{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^5 - x^7)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8}\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4-3}{24} = \frac{1}{48}$$

oder (nach Korollar 146)

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} x^3 y\,dx\right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4 y\right]_{x=y}^{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (y^3 - y^5)\,dy$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right]_{y=0}^{1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{3-2}{12} = \frac{1}{48}$$

<u>Korollar 147</u> (Prinzip von Cavalieri) Die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ besitze (k-dimensionalen) Jordan-Inhalt und liege zwischen den beiden Hyperebenen $x_1 = a$ und $x_1 = b$ (d.h. wenn $\underline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in A$ dann ist $a \le x_1 \le b$). Für $\xi \in [a,b]$ besitze $A_\xi = \{\underline{x} = (x_1,\dots,x_k) \in A \mid x_1 = \xi\}$ den $(k-1)$-dimensionalen Jordan-Inhalt $v(A_\xi)$.

Dann ist $v(A) = \int_a^b v(A_\xi)\,d\xi$.

<u>Beweis:</u> Ist Q ein Quader im $(k-1)$-dimensionalen Raum mit Koordinaten $x_2,\dots,x_k$, derart dass $A \subseteq [a,b]\times Q$, so ist

$$v(A) = \int_{[a,b]\times Q} 1_A(\underline{x})\,d\underline{x} \overset{\text{Satz 139}}{=} \int_a^b \Big(\underbrace{\int_Q 1_A(\xi,x_2,\dots,x_k)\,d(x_2,\dots,x_k)}_{=v(A_\xi)}\Big)\,d\xi = \int_a^b v(A_\xi)\,d\xi$$

<u>Beispiele:</u> 1) Volumen von Rotationskörpern. Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $f \ge 0$ und $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b,\ y^2+z^2 \le (f(x))^2\}$. Für jedes $x \in [a,b]$ ist A_x die Kreisscheibe $A_x = \{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid y^2+z^2 \le (f(x))^2\}$, die Flächeninhalt $v(A_x) = \pi(f(x))^2$ besitzt. Nach Korollar 147 ist $v(A) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$.

2) Kugelvolumen. Es sei $r>0$ und $A = \overline{B_r(\underline{0})} = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\underline{x}\| \le r\}$.

Für $\xi \in [-r,r]$ ist

$$A_\xi = \{(\xi,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \xi^2+x_2^2+x_3^2 \le r^2\} = \{(\xi,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_2^2+x_3^2 \le r^2-\xi^2\}$$

eine Kreisscheibe mit Flächeninhalt $v(A_\xi) = \pi(r^2-\xi^2)$. Nach Korollar 147 ist das Volumen der Kugel mit Radius r daher

$$v(A) = \pi\int_{-r}^{r}(r^2-\xi^2)\,d\xi = \pi\left[r^2\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right]_{\xi=-r}^{r} = \pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3+r^3-\frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4\pi}{3}r^3.$$