2.11 Weglängen

Definition: Ein Weg ist eine stetige Abbildung $\gamma: I \to \mathbb{R}^\ell$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall sein soll. In Koordinaten schreiben wir dafür $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_\ell(t))$. Das Bild $C := \gamma(I)$ wird die von γ erzeugte Kurve genannt und γ eine Parametrisierung der Kurve.

Beispiele: 1) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ parametrisiert den Einheitskreis.

2) $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ durchläuft den Einheitskreis mit doppelter Geschwindigkeit und daher zweimal. Erzeugte Kurve ist ebenfalls der Einheitskreis.

3) $\gamma_1: [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$ und $\gamma_2: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ parametrisieren beide einen Viertelkreisbogen des Einheitskreises.

4) $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ist eine Zykloide (Ein Kreis rollt auf einer Geraden, ein Punkt am Kreisrand beschreibt die Zykloide. Für eine Skizze siehe Bsp. 4 auf Seite 94.)

5) $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$ (mit $r, a > 0$) ist eine Schraubenlinie (Für eine Skizze siehe Bsp. 6 auf Seite 95.)

6) Ist $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$, also der Graph von f, ein Weg.

7) Es gibt stetige, <u>surjektive</u> Abbildungen $\gamma: [0,1] \to [0,1]^2$ (sogenannte Peanokurven), d.h. diese „Kurven" füllen in endlicher Zeit eine Fläche aus!

Definition: Ein Weg $\gamma: I \to \mathbb{R}^\ell$ heißt differenzierbar, wenn die Abbildung γ differenzierbar ist, d.h. der Grenzwert

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_\ell'(t))$$

existiert für alle $t \in I$. Ist γ differenzierbar, so heißt $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_\ell'(t))$ Geschwindigkeitsvektor. Er beschreibt Richtung und Betrag der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t, wobei $\|\gamma'(t)\|$ der Betrag der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist.

Beispiele: 1) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ist differenzierbar mit Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$.

2) $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ ist differenzierbar mit Geschwindigkeitsvektor $\gamma'(t) = (-2\sin(2t), 2\cos(2t))$ und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t)} = \sqrt{4} = 2$.

3) Die Schraubenlinie $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, at)$ ist differenzierbar mit $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t, a)$ und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + a^2} = \sqrt{r^2+a^2}$

4) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so ist der Funktionsgraph $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ ebenfalls differenzierbar mit $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1+(f'(t))^2}$.

5) Die Zykloide $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$ ist differenzierbar mit $\gamma'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1-2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{2(1-\cos t)}$.

Bemerkung: Beim letzten Beispiel fällt auf, dass die Zykloidenabbildung differenzierbar ist, obwohl die Zykloide „Spitzen" hat. Das liegt daran, dass es sich bei der Zykloide um das Bild der Abbildung handelt und nicht um ihren Graphen. (Dieser wäre die Abbildung $t \mapsto (t, t-\sin t, 1-\cos t)$.)

Definition: Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^\ell$ ein Weg und $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subseteq [a,b]$ eine Zerlegung von $[a,b]$ (d.h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$). Wir setzen

$$\ell(\gamma, Z) = \|\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\| + \dots + \|\gamma(t_n) - \gamma(t_{n-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

und definieren die Länge des Weges γ durch

$$L(\gamma) = \sup\{\ell(\gamma, Z) \mid Z \text{ ist Zerlegung von } [a,b]\} = \sup_Z \ell(\gamma; Z).$$

Ist $L(\gamma) < \infty$, so wird γ rektifizierbar genannt.

Bemerkungen: 1) Anschaulich entspricht $\ell(\gamma, Z)$ der Länge eines Polygonzugs, der nahe bei γ liegen wird wenn die Zerlegung Z hinreichend fein ist.

2) Ist die Zerlegung Z' des Intervalls $[a,b]$ feiner als die Zerlegung Z, so ist $\ell(\gamma, Z') \geq \ell(\gamma, Z)$. Ist $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ und fügt man einen Punkt $s \in [a,b]$ mit $t_{i-1} < s < t_i$ hinzu, d.h. geht man zur feineren

Zerlegung $Z' = \{t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, s, t_i, \dots, t_n\}$ über, so ist wegen

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \|\gamma(t_i) - \gamma(s)\| + \|\gamma(s) - \gamma(t_{i-1})\|$$

klarerweise $\ell(\gamma, Z') \geq \ell(\gamma, Z)$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion.

3) Es gibt nicht rektifizierbare Wege

Satz 148 Der Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^\ell$ sei eine C^1-Abbildung. (Ist also $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_\ell(t))$, so existiert $\gamma_i' : [a,b] \to \mathbb{R}$ und ist stetig für $1 \leq i \leq \ell$.)

Dann ist γ rektifizierbar und

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \dots + (\gamma_\ell'(t))^2}\, dt.$$

Bemerkungen: 1) Physikalisch betrachtet ist dieser Satz fast trivial. Es ist ja

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad \text{und daher Weg} = \text{Geschwindigkeit} \times \text{Zeit},$$

allerdings handelt es sich dabei um die Durchschnittsgeschwindigkeit. Berücksichtigt man, dass sich die Geschwindigkeit normalerweise bei einer Bewegung ständig ändern kann, d.h. es ist

$$\text{Momentangeschwindigkeit} = \frac{d\,\text{Weg}}{d\,\text{Zeit}}$$

so erhält man stattdessen die Gleichung

$$\text{Weg} = \int_{\text{Anfangszeit}}^{\text{Endzeit}} \text{Momentangeschwindigkeit}(t)\, dt$$

– was genau der Aussage von Satz 148 entspricht.

2) Viel anschaulicher als der nachfolgende exakte Beweis ist die folgende „Physikerherleitung"

$$L(\gamma) = \int \sqrt{dx_1^2 + \dots + dx_\ell^2} = \int \sqrt{\frac{dx_1^2 + \dots + dx_\ell^2}{dt^2}\, dt^2}$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_\ell}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\gamma_i' : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ und daher gleichmäßig stetig. Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \text{ sodass } |t-s| < \delta \Rightarrow |\gamma_i'(t) - \gamma_i'(s)| < \frac{\varepsilon}{\ell(b-a)} \quad \text{für } t,s \in [a,b] \text{ und } 1 \le i \le \ell$$

Es sei nun $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, die $t_k - t_{k-1} < \delta$ für $1 \le k \le n$ erfüllt. Wir schätzen zunächst die Differenz

$$\left| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| \, dt \right|$$

ab. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt:

$$\forall i \in \{1, \dots, \ell\} \ \exists \tau_i \in [t_{k-1}, t_k] : \gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \gamma_i'(\tau_i) \cdot (t_k - t_{k-1})$$

Daraus erhält man $|\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|^2 = (t_k - t_{k-1})^2 (\gamma_i'(\tau_i))^2$ für $1 \le i \le \ell$ und

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} (\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}))^2} = \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 \sum_{i=1}^{\ell} (\gamma_i'(\tau_i))^2}$$

$$= (t_k - t_{k-1}) \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} (\gamma_i'(\tau_i))^2} = (t_k - t_{k-1}) \cdot \|(\gamma_1'(\tau_1), \dots, \gamma_\ell'(\tau_\ell))\|$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$\exists \tau \in [t_{k-1}, t_k] : \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| \, dt = (t_k - t_{k-1}) \cdot \|\gamma'(\tau)\| = (t_k - t_{k-1}) \cdot \|(\gamma_1'(\tau), \dots, \gamma_\ell'(\tau))\|.$$

Nun können wir die angekündigte Abschätzung durchführen:

$$\left| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| \, dt \right| = (t_k - t_{k-1}) \left| \|(\gamma_1'(\tau_1), \dots, \gamma_\ell'(\tau_\ell))\| - \|\gamma_1'(\tau), \dots, \gamma_\ell'(\tau)\| \right|$$

$$\overset{\text{Lemma 80}}{\le} (t_k - t_{k-1}) \cdot \|(\gamma_1'(\tau_1) - \gamma_1'(\tau), \dots, \gamma_\ell'(\tau_\ell) - \gamma_\ell'(\tau))\| \quad (\text{denn } |\|\underline{x}\| - \|\underline{y}\|| \le \|\underline{x} - \underline{y}\|)$$

$$\le (t_k - t_{k-1}) \sum_{i=1}^{\ell} |\gamma_i'(\tau_i) - \gamma_i'(\tau)| \quad (\text{denn } \|\underline{x}\| \le |x_1| + \dots + |x_\ell|)$$

$$< (t_k - t_{k-1}) \cdot \ell \cdot \frac{\varepsilon}{\ell(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a} (t_k - t_{k-1}) \quad (\text{da } |\tau_i - \tau| < \delta \text{ für } 1 \le i \le \ell)$$

Damit können wir nun die Differenz

$$\left| \ell(\gamma, Z) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \right|$$

abschätzen:

$$\left| \ell(\gamma, Z) - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| = \left| \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n \left(\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| - \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})}_{= b-a} = \varepsilon.$$

Ist Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$, so wähle eine feinere Zerlegung $\tilde{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, die $t_k - t_{k-1} < \delta$ (für $1 \leq k \leq n$) erfüllt. Nach Bemerkung 2 (vor Satz 148) und dem bisher Bewiesenen gilt dann $\ell(\gamma, Z) \leq \ell(\gamma, \tilde{Z}) < \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt + \varepsilon$.

Da Z eine beliebige Zerlegung von $[a,b]$ war, folgt daraus:
$L(\gamma) = \sup\limits_Z \ell(\gamma, Z) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhält man sofort $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, insbesondere ist γ rektifizierbar.

Für die umgekehrte Ungleichung wähle zu $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, die $t_k - t_{k-1} < \delta$ (für $1 \leq k \leq n$) erfüllt. Nach dem oben Bewiesenen gilt dann $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \varepsilon < \ell(\gamma, Z) \leq L(\gamma)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, erhält man schließlich

$$L(\gamma) = \sup_Z \ell(\gamma, Z) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

<u>Beispiele</u>: 1) Kreisumfang eines Kreises mit Radius $r > 0$:
Es sei $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Dann ist $\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$ und daher $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} r\, dt = 2\pi r$.

2) Länge eines Zykloidenbogens: Es sei $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.
Dann ist $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$ und daher

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \tfrac{t}{2} + \cos^2 \tfrac{t}{2} - \cos^2 \tfrac{t}{2} + \sin^2 \tfrac{t}{2}}\, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \tfrac{t}{2}}\, dt = 2 \int_0^{2\pi} \left|\sin \tfrac{t}{2}\right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{t}{2}\, dt = \left[-4\cos\tfrac{t}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} = -4(-1-1) = 8$$

3) Weglänge des Graphen einer Funktion: Ist $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\gamma:[a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ ihr Graph, so ist $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ und daher $L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$.

Bemerkung: Auch dieses Resultat erhält man schnell und überzeugend (wenn auch nicht korrekt!) mit Hilfe der „Physikerherleitung":

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{dx^2+dy^2} = \int_a^b \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$