2.2 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen

<u>Definition</u>: Es sei $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$. Wir verwenden die Bezeichnung
$B_r(\underline{x}) = \{ y \in \mathbb{R}^k \mid \|y - \underline{x}\| < r \}$ (Ball mit Radius r um $\underline{x}$).

<u>Bemerkung</u>: Im eindimensionalen Fall $k=1$ ist $B_r(x)$ das Intervall $(x-r, x+r)$.

<u>Definition</u>: Eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt offen wenn $\forall \underline{x} \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U$.

<u>Satz 88</u> (i) Ist $I (\neq \emptyset)$ eine (Index)Menge und $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ offen $\forall i \in I$, so ist
$\bigcup_{i \in I} U_i$ ebenfalls offen;

(ii) Ist $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ offen für $1 \leq i \leq m$, so ist $U_1 \cap \dots \cap U_m$ ebenfalls offen.

Dh die Vereinigung beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist ebenfalls offen.

<u>Beweis</u>: (i) Es sei $U := \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $\underline{x} \in U$, so $\exists j \in I : \underline{x} \in U_j$. Da U_j offen ist,
$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U_j \subseteq U$.

(ii) Es sei $\underline{x} \in U_1 \cap \dots \cap U_m$. Dann ist $\underline{x} \in U_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$. Da $U_1, \dots, U_m$ alle offen sind, gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $\varepsilon_i > 0$ mit der Eigenschaft $B_{\varepsilon_i}(\underline{x}) \subseteq U_i$.
Es sei $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$. Dann ist $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq B_{\varepsilon_i}(\underline{x}) \subseteq U_i$ für $1 \leq i \leq m$.
Daher ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$.

<u>Beispiele für offene Teilmengen von $\mathbb{R}$</u>:

1) Offene beschränkte Intervalle (a,b) (mit $a<b$). Für $x \in (a,b)$ sei $\varepsilon := \min\{x-a, b-x\}$. Dann ist $B_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$ (denn $x - \varepsilon \geq x-(x-a) = a$ und $x + \varepsilon \leq x + b - x = b$).

2) Offene unbeschränkte Intervalle $(a, +\infty)$ (mit $a \in \mathbb{R}$). Für $x \in (a, +\infty)$ sei $\varepsilon := x - a$. Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq (a, +\infty)$.

3) Offene unbeschränkte Intervalle $(-\infty, a)$ (mit $a \in \mathbb{R}$).

4) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$: Es ist trivial, dass $\mathbb{R}$ offen ist (z.B. weil $B_1(x) \subseteq \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}$) und $\emptyset$ ist offen, da die definierende Eigenschaft leer erfüllt ist.

5) Es seien $a_1 < a_2 < \dots < a_m$ reelle Zahlen. Dann ist $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ offen, da
$\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\} = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \cup \dots \cup (a_{m-1}, a_m) \cup (a_m, +\infty)$ eine Vereinigung offener Mengen ist.

Bemerkung: Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen braucht nicht offen zu sein. z.B. ist die Menge $G := \bigcap_{m=1}^{\infty} (0, 1+\frac{1}{m})$ $(\subseteq \mathbb{R})$ nicht offen, da $G = (0,1]$. Da $1 \in G$, aber es gibt kein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $B_\varepsilon(1) \subseteq G$.

Beispiele für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$:

1) Es sei $1 \le i \le k$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $H_i^{c+} := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i > c\}$ und $H_i^{c-} := \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i < c\}$ offen. (Für $k=2$ sind das offene Halbebenen.) Für $\underline{x} \in H_i^{c\pm}$ sei $\varepsilon := |x_i - c|$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq H_i^{c\pm}$. (Für $\underline{x} \in H_i^{c+}$ und $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$ gilt ja z.B. $y_i > x_i - \varepsilon = x_i - (x_i - c) = c$.)

2) Für $1 \le i \le k$ seien $c_i < d_i$ reelle Zahlen. Dann ist der k-dimensionale offene Quader $(c_1,d_1) \times (c_2,d_2) \times \dots \times (c_k,d_k) = \prod_{j=1}^{k} (c_i,d_i) = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid c_i < x_i < d_i \text{ für } 1 \le i \le k\}$ offen, da $(c_1,d_1) \times \dots \times (c_k,d_k) = H_1^{c_1+} \cap \dots \cap H_k^{c_k+} \cap H_1^{d_1-} \cap \dots \cap H_k^{d_k-}$ ein endlicher Durchschnitt offener Mengen ist.

3) $\mathbb{R}^k$ bzw. $\emptyset$: Das ist wieder trivial bzw. leer erfüllt wie im Fall $k=1$.

4) Es seien $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^k$. Dann ist $\mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ offen. Für $\underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ sei $\varepsilon := \min\{\|\underline{x} - \underline{a}_1\|, \dots, \|\underline{x} - \underline{a}_m\|\}$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$.

5) Es sei $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$. Dann ist $B_r(\underline{a})$ offen. Es sei $\underline{x} \in B_r(\underline{a})$, d.h. $\|\underline{x} - \underline{a}\| < r$. Setze $\varepsilon := r - \|\underline{x} - \underline{a}\|$. Dann ist $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq B_r(\underline{a})$, denn für $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$ gilt $\|y - \underline{x}\| < \varepsilon = r - \|\underline{x} - \underline{a}\|$ und daher $\|y - \underline{a}\| \le \|y - \underline{x}\| + \|\underline{x} - \underline{a}\| < r$, d.h. $y \in B_r(\underline{a})$.

6) $U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$ ist offen.

Es sei $\underline{x} = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $x_2 \neq 0$. Setze $\varepsilon = |x_2|$. Ist $y \in B_\varepsilon(\underline{x})$, so ist

$|y_2 - x_2| \le \|y - \underline{x}\| < \varepsilon = |x_2|$ und daher

$|y_2| = |x_2 + (y_2 - x_2)| \ge \big||x_2| - |y_2 - x_2|\big| \ge |x_2| - |y_2 - x_2| > 0$, d.h. $y_2 \neq 0$ und $B_\varepsilon(\underline{x}) \subseteq U$.

Definition: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt abgeschlossen wenn $\mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist.

Satz 89 (i) Ist $I (\neq \emptyset)$ eine (Index)Menge und $A_i \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen $\forall i \in I$, so ist $\bigcap_{i \in I} A_i$ ebenfalls abgeschlossen,

(ii) Ist $A_i \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen für $1 \le i \le m$, so ist $A_1 \cup \dots \cup A_m$ ebenfalls abgeschlossen.

D.h. der Durchschnitt beliebig vieler und die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist ebenfalls abgeschlossen.

Beweis: (i) Für jedes $i \in I$ gibt es eine offene Menge $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft $A_i = \mathbb{R}^k \setminus U_i$. Nach Satz 88 (i) ist $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen und daher auch

$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (\mathbb{R}^k \setminus U_i) = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ abgeschlossen.

(ii) Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ gibt es eine offene Menge $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft $A_i = \mathbb{R}^k \setminus U_i$. Nach Satz 88 (ii) ist $\bigcap_{i=1}^m U_i$ offen und daher auch $\bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m (\mathbb{R}^k \setminus U_i) = \mathbb{R}^k \setminus \bigcap_{i=1}^m U_i$ abgeschlossen.

Definition: Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$.
Ein Punkt $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ heißt Häufungspunkt von M wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \underline{y} \in M, \underline{y} \neq \underline{x} : \|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon$.
Ein Punkt $\underline{x} \in M$ heißt isolierter Punkt von M wenn $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{x}) \cap M = \{\underline{x}\}$.

Satz 90 Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$ und $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$. Dann sind äquivalent:

(i) $\underline{x}$ ist Häufungspunkt von M,
(ii) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $\underline{y} \in M, \underline{y} \neq \underline{x}$ mit der Eigenschaft $\|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon$,
(iii) Es gibt eine Folge $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ in M, derart dass $\underline{x}_n \neq \underline{x}\ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{x}$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (iii) Ist $\underline{x}$ ein Häufungspunkt von M, so gilt, dass

$$\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in M, \underline{x}_n \neq \underline{x} : \|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \tfrac{1}{n}.$$

Offenbar ist $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in M, die die Eigenschaften $\underline{x}_n \neq \underline{x}\ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ besitzt.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists n_0 \geq 1$, derart dass $\|\underline{x}_n - \underline{x}\| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$.
Ist $\underline{y} \in \{\underline{x}_n \mid n \geq n_0\}$, so ist $\underline{y} \in M, \underline{y} \neq \underline{x}$ und $\|\underline{y} - \underline{x}\| < \varepsilon$. Die Menge $\{\underline{x}_n \mid n \geq n_0\}$ ist unendlich, denn andernfalls wäre $\lim_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{x}$ unmöglich.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ist trivial.

Bemerkung: Ein Häufungspunkt einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^k$ kann, aber muss nicht in M liegen.
Ist z.B. $M = [0,1) \cup \{2\}\ (\subseteq \mathbb{R})$, so sind alle $x \in [0,1)$ Häufungspunkte von M und Elemente von M. Der Punkt 1 ist Häufungspunkt von M aber $1 \notin M$. Der Punkt 2 ist isolierter Punkt von M (und daher kein Häufungspunkt von M).

Satz 91 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Dann sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen,
(ii) Ist $\underline{x}_n \in A\ \forall n \geq 1$ und $\underline{a} = \lim_{n \to \infty} \underline{x}_n$, so ist $\underline{a} \in A$,
(iii) Ist $\underline{a}$ Häufungspunkt von A, so ist $\underline{a} \in A$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Angenommen $\underline{a} \notin A$, d.h. $\underline{a} \in \mathbb{R}^k \setminus A$. Da $\mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist, $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$. Andererseits $\exists N \geq 1 \ \forall n \geq N : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \varepsilon$ und daher $\underline{x}_n \in B_\varepsilon(\underline{a}) \subseteq \mathbb{R}^k \setminus A \ \ \forall n \geq N$. Dass ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\underline{x}_n \in A$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Da $\underline{a}$ Häufungspunkt von A ist, gibt es nach Satz 90 eine Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ in A mit den Eigenschaften $\underline{x}_n \neq \underline{a} \ \forall n \geq 1$ und $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$. Nach Voraussetzung ist $\underline{a} \in A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, $\mathbb{R}^k \setminus A$ wäre nicht offen. Dann würde gelten, dass $\exists \underline{a} \in \mathbb{R}^k \setminus A \ \ \forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\underline{a}) \not\subseteq \mathbb{R}^k \setminus A$. Das besagt $B_\varepsilon(\underline{a}) \cap A \neq \emptyset \ \ \forall \varepsilon > 0$. Insbesondere wäre $B_{1/n}(\underline{a}) \cap A \neq \emptyset \ \ \forall n \geq 1$, d.h. $\forall n \geq 1 \ \exists \underline{x}_n \in A : \|\underline{x}_n - \underline{a}\| < \frac{1}{n}$. Da $\underline{a} \notin A$ wäre dabei $\underline{x}_n \neq \underline{a} \ \forall n \geq 1$. Da offensichtlich $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$, wäre $\underline{a}$ nach Satz 90 Häufungspunkt von A und daher nach Voraussetzung $\underline{a} \in A$, Widerspruch.

Beispiele für abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1) Abgeschlossene beschränkte Intervalle $[a,b]$ (mit $a \leq b$). Das gilt weil $\mathbb{R} \setminus [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ offen ist – oder (mit Hilfe von Satz 91): Ist $a \leq x_n \leq b \ \forall n \geq 1$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, so ist $a \leq \lim_{n\to\infty} x_n \leq b$.

2) Abgeschlossene unbeschränkte Intervalle $[a, +\infty)$ (mit $a \in \mathbb{R}$). Das gilt weil $\mathbb{R} \setminus [a, +\infty) = (-\infty, a)$ offen ist – oder (mit Hilfe von Satz 91): Ist $x_n \geq a \ \forall n \geq 1$ und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, so ist $\lim_{n\to\infty} x_n \geq a$.

3) Abgeschlossene unbeschränkte Intervalle $(-\infty, a]$ (mit $a \in \mathbb{R}$).

4) $\mathbb{R}$ und $\emptyset$: Das gilt weil $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$ und $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ offen sind. Alternativ kann man auch hier Satz 91 verwenden: Dann ist es trivial, dass $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist und Bedingungen (ii) und (iii) aus Satz 91 sind leer erfüllt.

5) Es seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Dann ist $\{a_1, \dots, a_m\}$ abgeschlossen, da $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$ offen ist (siehe Beispiel 5) auf Seite 85).

6) Die Menge $A = \{\frac{1}{m} \mid m \geq 1\} \cup \{0\}$ ist abgeschlossen, da

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}\right) \cup (1, +\infty)$$ offen ist (als Vereinigung offener Mengen)

7) Es seien $A_0 = [0,1]$, $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, usw. D.h. A_{m+1} entsteht aus A_m durch entfernen der (offenen) mittleren Drittel aller Intervalle, die A_m bilden. Für alle $m \geq 0$ ist A_m eine abgeschlossene Menge

als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen. Es sei $C := \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Die Menge C wird Cantorsches Diskontinuum genannt. Sie ist abgeschlossen, da sie Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist.

<u>Bemerkung</u>: Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen braucht nicht abgeschlossen zu sein

1) Die Menge $F = \bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1-\frac{1}{n}]$ ist nicht abgeschlossen, da $F = [0,1)$ und $\mathbb{R} \setminus F = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ nicht offen ist bzw. da die Folge $(1-\frac{1}{n})_{n \geq 2}$ in F liegt, aber $\lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n}) = 1 \notin F$.

2) Die Menge $F = \{\frac{1}{m} \mid m \geq 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\frac{1}{m}\}$ ist nicht abgeschlossen, da $\mathbb{R} \setminus F = (-\infty, 0] \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} (\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}) \cup (1, +\infty)$ nicht offen ist bzw. da die Folge $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ in F liegt aber $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin F$.

24.11.2021

<u>Beispiele für abgeschlossene Teilmengen des $\mathbb{R}^k$</u>:

1) Es sei $1 \leq i \leq k$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $\overline{H}_i^{c+} = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq c\}$ und $\overline{H}_i^{c-} = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \leq c\}$ abgeschlossen. (Für $k=2$ sind das abgeschlossene Halbebenen) Das gilt, da $\mathbb{R}^k \setminus \overline{H}_i^{c+} = H_i^{c-}$ und $\mathbb{R}^k \setminus \overline{H}_i^{c-} = H_i^{c+}$ offen sind (siehe Bsp. 1) auf Seite 86).

2) Für $1 \leq i \leq k$ seien $c_i \leq d_i$ reelle Zahlen Dann ist der k-dimensionale abgeschlossene Quader

$$[c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_k, d_k] = \prod_{j=1}^{k} [c_j, d_j] = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid c_i \leq x_i \leq d_i \text{ für } 1 \leq i \leq k\}$$

abgeschlossen, da $[c_1, d_1] \times \dots \times [c_k, d_k] = \overline{H}_1^{c_1+} \cap \dots \cap \overline{H}_k^{c_k+} \cap \overline{H}_1^{d_1-} \cap \dots \cap \overline{H}_k^{d_k-}$ ein Durchschnitt abgeschlossener Mengen ist.

3) $\mathbb{R}^k$ bzw. $\emptyset$: Wie im Fall $k=1$ (Bsp. 4) auf Seite 88)

4) Es seien $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^k$. Dann ist $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ abgeschlossen, da $\mathbb{R}^k \setminus \{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_m\}$ offen ist (siehe Bsp. 4) auf Seite 86).

5) Es sei $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$, d.h. die x_1-Achse. Dann ist A abgeschlossen, da die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \neq 0\}$ offen ist (siehe Bsp. 6) auf Seite 86).

Alternativ betrachte eine Folge $(\underline{x}_n)_{n \geq 1}$ mit $\underline{x}_n = (x_{n1}, x_{n2}) \in A$ und $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a} = (a_1, a_2)$. Da $\underline{x}_n \in A$ $\forall n \geq 1$ ist $x_{n2} = 0$ $\forall n \geq 1$ und daher $a_2 = \lim_{n\to\infty} x_{n2} = 0$, d.h. $\underline{a} \in A$.

6) Es sei $r>0$ und $A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid \|\underline{x}\| \leq r\}$, d.h. die „abgeschlossene Vollkugel" mit Mittelpunkt $\underline{0}$ und Radius r. Dann ist A eine abgeschlossene Menge. Es sei $\underline{x}_n \in A$ $\forall n \geq 1$ und $\underline{a} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$. Da $\underline{x}_n \in A$ $\forall n \geq 1$ gilt $\|\underline{x}_n\| \leq r$ $\forall n \geq 1$.

Daraus folgt $\|\underline{a}\| = \|\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n\| \overset{\text{Satz 86 (iv)}}{=} \lim_{n\to\infty} \|\underline{x}_n\| \leq r$, d.h. $\underline{a} \in A$.

Bemerkungen: 1) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^k$ kann durchaus weder offen noch abgeschlossen sein. z.B. ist $M = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$ nicht offen, da $0 \in M$, aber $\nexists \varepsilon>0 : B_\varepsilon(0) \subseteq M$. Aber M ist auch nicht abgeschlossen, da $\mathbb{R}\setminus M$ nicht offen ist. Es gilt ja $1 \in \mathbb{R}\setminus M = (-\infty,0) \cup [1,+\infty)$ und $\nexists \varepsilon>0 : B_\varepsilon(1) \subseteq \mathbb{R}\setminus M$.

Allgemeiner ist $M = [0,1)^k \subseteq \mathbb{R}^k$ weder offen noch abgeschlossen: Die Menge M ist nicht offen, da $\underline{0} \in M$ aber $\nexists \varepsilon>0 : B_\varepsilon(\underline{0}) \subseteq M$ und M ist nicht abgeschlossen, da $(1,\dots,1) \in \mathbb{R}^k\setminus M$ aber $\nexists \varepsilon>0 : B_\varepsilon(1,\dots,1) \subseteq \mathbb{R}^k\setminus M$.

2) Die Mengen $\emptyset (\subseteq \mathbb{R}^k)$ und $\mathbb{R}^k$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen (als Teilmengen des $\mathbb{R}^k$). Man kann zeigen, dass sie die einzigen beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^k$ mit dieser Eigenschaft sind.

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt beschränkt, wenn $\exists R>0 : M \subseteq B_R(\underline{0})$.

Beispiele für beschränkte (und unbeschränkte) Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1) Es seien $a \leq b$ reelle Zahlen. Alle beschränkten Intervalle (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ und $[a,b]$ sind beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, da $[a,b] \subseteq (-R,R)$ mit $R = 1 + \max\{|a|,|b|\}$ (und $(a,b) \subseteq [a,b]$, $(a,b] \subseteq [a,b]$ und $[a,b) \subseteq [a,b]$).

2) Jede endliche Menge $\{a_1,\dots,a_m\} \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt, da $\{a_1,\dots,a_m\} \subseteq B_R(0)$ mit $R = 1 + \max\{|a_1|,\dots,|a_m|\}$.

3) Sowohl $M = \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ als auch $\overline{M} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ sind beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$, da $M \subseteq \overline{M} \subseteq (-2,2) = B_2(0)$.

4) Das Cantorsche Diskontinuum C ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, da $C \subseteq [0,1] \subseteq (-2,2) = B_2(0)$

5) $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind keine beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$ (Für jedes $R>0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit der Eigenschaft $m > R$.)

6) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Die unbeschränkten Intervalle $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$, $(a,+\infty)$ und $[a,+\infty)$ sind nicht beschränkt.

Beispiele für beschränkte (und unbeschränkte) Teilmengen des $\mathbb{R}^k$:

1) $B_r(\underline{x})$ (mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$) und $\overline{B_r(\underline{x})}$ sind beschränkt, da $B_r(\underline{x}) \subseteq \overline{B_r(\underline{x})} \subseteq B_R(\underline{0})$ mit $R = \|\underline{x}\| + r + 1$.

2) k-dimensionale Quader $(c_1, d_1) \times \cdots \times (c_k, d_k)$ und $[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k]$ sind beschränkt. (Wegen $(c_1, d_1) \times \cdots \times (c_k, d_k) \subseteq [c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k]$, reicht es zu zeigen, dass $[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k]$ beschränkt ist. Nun ist $[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k] \subseteq \overline{B_r(\underline{x})}$, wobei $\underline{x}$ der Mittelpunkt des Quaders sei, d.h. $\underline{x} = \frac{1}{2}(c_1 + d_1, \ldots, c_k + d_k)$ und r der Abstand von $\underline{x}$ zu einem Eckpunkt des Quaders, d.h. $r = \frac{1}{2}\sqrt{(d_1 - c_1)^2 + \cdots + (d_k - c_k)^2}$. Die Behauptung folgt nun aus Beispiel 1).)

3) Endliche Mengen $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ sind beschränkt, da $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\} \subseteq B_R(\underline{0})$ mit $R = 1 + \max\{\|\underline{a}_1\|, \ldots, \|\underline{a}_n\|\}$.

4) Die Mengen H_i^{c-}, H_i^{c+}, $\overline{H}_i^{c-}$ und $\overline{H}_i^{c+}$ (mit $1 \leq i \leq k$ und $c \in \mathbb{R}$) sind nicht beschränkt.

Definition: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^k$ heißt kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele für kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$:

1) Alle beschränkten, abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ sind kompakte Teilmengen von $\mathbb{R}$ (und werden darum oft auch „kompakte Intervalle" genannt).

2) Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist kompakt.

3) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \geq 1\}$ ist kompakt.

4) Das Cantorsche Diskontinuum ist kompakt.

Beispiele für kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^k$:

1) $\overline{B_r(\underline{x})}$ (mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$) ist kompakt.

2) Abgeschlossene k-dimensionale Quader $[c_1, d_1] \times \cdots \times [c_k, d_k]$ sind kompakt.

3) Endliche Mengen $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ sind kompakt.

Satz 92 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) K ist kompakt,

(ii) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K,

(iii) Jede unendliche Teilmenge von K besitzt einen Häufungspunkt in K.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K. Dann ist $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ beschränkt. Nach Satz 87 (Satz von Bolzano-Weierstraß) besitzt $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$. Da K abgeschlossen ist, folgt $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$ wegen Satz 91.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wäre K unbeschränkt, so würde gelten, dass $\forall n \geq 1 \ \exists \underline{x}_n \in K: \|\underline{x}_n\| > n$. Die Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ würde in K liegen, aber keine konvergente Teilfolge besitzen, da $\|\underline{x}_n - \underline{a}\| \geq \|\underline{x}_n\| - \|\underline{a}\| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ für jedes $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$. Also ist K beschränkt.

Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge in K. Dann besitzt $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. Da $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$ folgt $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \in K$, d.h. K ist abgeschlossen nach Satz 91.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Es sei $M \subseteq K$ eine unendliche Menge. Wähle daraus eine abzählbar unendliche Teilmenge $\{\underline{x}_n \mid n \geq 1\}$ von M (d.h. die $\underline{x}_n \in M$ sind paarweise verschieden). Dann ist $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K und besitzt nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit Grenzwert $\underline{a} := \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. (Da die $\underline{x}_{n_j}$ paarweise verschieden sind, kann man $\underline{x}_{n_j} \neq \underline{a} \ \forall j \geq 1$ verlangen.) Nach Satz 90 ist $\underline{a}$ ein Häufungspunkt von M in K.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in K. Es sei $M := \{\underline{x}_n \mid n \geq 1\}$.
Ist M endlich, so $\exists \underline{a} \in M: \underline{x}_n = \underline{a}$ für unendlich viele $n \geq 1$. D.h. es gibt eine Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit $\underline{x}_{n_j} = \underline{a} \ \forall j \geq 1$ und daher $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \underline{a} \in K$.
Ist M unendlich, so besitzt M nach Voraussetzung einen Häufungspunkt $\underline{a} \in K$. Dann gilt, dass $\forall j \geq 1 \ \exists \underline{x}_{n_j} \in M$ mit der Eigenschaft $\|\underline{x}_{n_j} - \underline{a}\| < \frac{1}{j}$, wobei man $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ wählen kann. Offenbar ist $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ eine Teilfolge von $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ mit der Eigenschaft $\underline{a} = \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$.

<u>Bemerkungen</u>: 1) Der Begriff der kompakten Menge ist die „richtige" Verallgemeinerung für beschränkte abgeschlossene Intervalle $[a,b]$ im Mehrdimensionalen.

2) Kompaktheit wird oft anders definiert, nämlich folgendermaßen: Eine Menge K heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt. D.h. ist $(U_i)_{i\in I}$ irgendeine Familie offener Mengen U_i (mit $i \in I$) und $K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$, so gibt es $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $K \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.

Diese Definition ist nach dem Satz von Heine-Borel zu unserer äquivalent. Sie eignet sich wesentlich besser für Verallgemeinerungen.

Korollar 93 Ist $K \subseteq \mathbb{R}^k$ eine kompakte Menge und $A \subseteq \mathbb{R}^k$ eine abgeschlossene Menge, so ist $K \cap A$ eine kompakte Menge.

Beweis: Die Menge $K \cap A$ ist beschränkt, da $K \cap A \subseteq K$ und K eine beschränkte Menge ist. Die Menge $K \cap A$ ist abgeschlossen, da sie Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen ist.

Korollar 94 Ist $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge nichtleerer, kompakter Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, so ist $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \neq \emptyset$.

Beweis: Es sei $\underline{x}_n \in K_n$ beliebig gewählt. Da $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in der kompakten Menge K_1 ist, besitzt sie nach Satz 92 eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$. Da $n_j \geq j \ \forall j \geq 1$ ist dabei $\underline{x}_{n_j} \in K_j \ \forall j \geq 1$. Es sei $\underline{a} := \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j}$. Für jedes $m \geq 1$ ist $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq m}$ eine konvergente Folge in K_m. Da K_m eine abgeschlossene Menge ist, ist $\underline{a} \in K_m \ \forall m \geq 1$ (nach Satz 91). Daher ist $\underline{a} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_m$.

Bemerkung: Korollar 94 enthält als Spezialfall das Intervallschachtelungsprinzip: Ist $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_3, b_3] \supseteq \cdots$ eine absteigende Folge kompakter Intervalle (in $\mathbb{R}$), so folgt aus Korollar 94, dass $\bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \neq \emptyset$.

29.11.2021