2.3 Funktionen in mehreren Veränderlichen

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ (und $D \neq \emptyset$). Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^l$ ordnet jedem k-Tupel $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k) \in D$ ein eindeutig bestimmtes l-Tupel $y = (y_1, \dots, y_l) \in \mathbb{R}^l$ zu. Man schreibt dafür

$$y = (y_1, \dots, y_l) = f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_l(\underline{x})) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_l(x_1, \dots, x_k)),$$

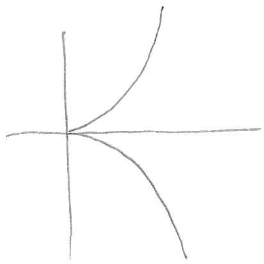
wobei $f_1, \dots, f_l : D \to \mathbb{R}$ Funktionen sind. (Welche Schreibweise man verwendet, hängt davon ab, was man betonen will.)

<u>Beispiele im Fall $k=1$</u>: Ist $k=1$ und D ein Intervall (also z.B. $f: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ oder $f: [a,b] \to \mathbb{R}^3$), so kann man sich f oft als Parametrisierung einer Kurve vorstellen.

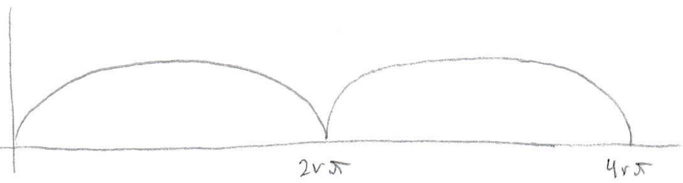
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (bzw. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$), $f(t) = \underline{x} + t\underline{y}$ mit $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$) und $\underline{y} \neq \underline{0}$ ist Parameterdarstellung einer Geraden.

2) $f: [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$ mit $r > 0$ ist Parametrisierung eines Kreises mit Mittelpunkt $\underline{0}$ und Radius r

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t^2, t^3)$ ist Parametrisierung der Neilschen Parabel

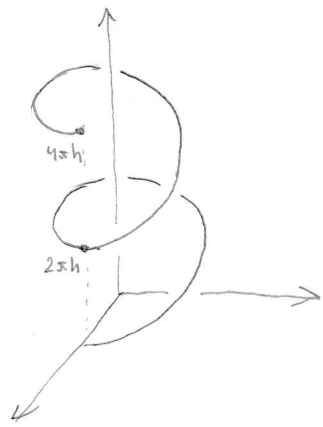


4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ mit $r > 0$ ist Parametrisierung einer Zykloide, also der Kurve, die von einem Randpunkt eines rollenden Kreises mit Radius r beschrieben wird.



5) Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist $g: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x, f(x))$ der Graph von f. (Allgemeiner gilt: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$, $f(x_1, \dots, x_k) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_l(\underline{x}))$, so bezeichnet man $g: D \to \mathbb{R}^{k+l}$, $g(\underline{x}) = (x_1, \dots, x_k, f_1(\underline{x}), \dots, f_l(\underline{x}))$ als Graph von f.)

6) $f:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3$, $f(t)=(r\cos t, r\sin t, ht)$ mit $r,h>0$ ist ein Stück einer Schraubenlinie mit Ganghöhe $2\pi h$.



Beispiele im Fall $l=1$, d.h. Abbildungen $f: D\to\mathbb{R}$ mit $D\subseteq\mathbb{R}^k$

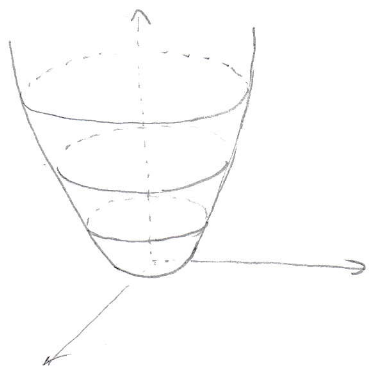
1) $p:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $p(\underline{x})=\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_k=0}^{m_k} c_{i_1,\dots,i_k}\, x_1^{i_1}\dots x_k^{i_k}$ sind Polynomfunktionen (oder auch ganzrationale Funktionen) wobei $c_{i_1,\dots,i_k}\in\mathbb{R}$ für $0\le i_1\le m_1,\dots,0\le i_k\le m_k$.

2) „Ein wichtiger Spezialfall von Bsp. 1) sind quadratische Formen

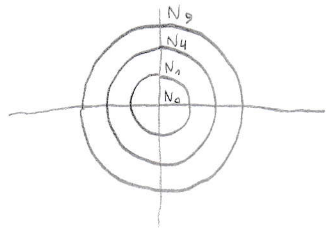
$q:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $q(\underline{x})=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}x_ix_j$ mit $c_{ij}\in\mathbb{R}$ für $1\le i,j\le k$.

z.B. im Fall $k=2$: $q(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$

Der Graph von q ist ein Paraboloid



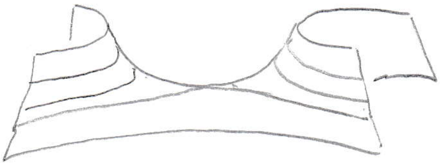
Niveaumengen („Höhenschichtlinien")



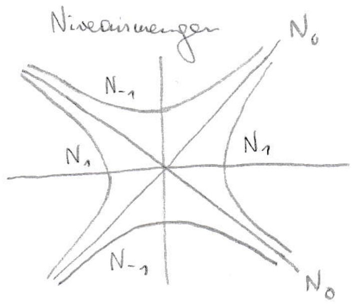
(Formal: Ist $D\subseteq\mathbb{R}^k$, $f:D\to\mathbb{R}$ und $c\in\mathbb{R}$, so nennt man $N_c=\{\underline{x}\in D \mid f(\underline{x})=c\}$ Niveaumenge.)

Noch eine quadratische Form: $q(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$

Der Graph von q ist eine Sattelfläche



Niveaumengen



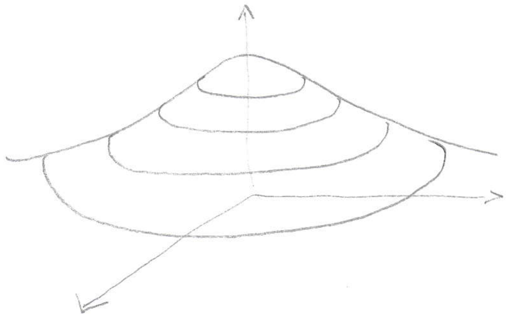
Dabei sind: N_0: $x_1^2 - x_2^2 = 0 \iff (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \iff x_2 = \pm x_1$

N_1: $x_1^2 - x_2^2 = 1 \iff x_1^2 = x_2^2 + 1 \iff x_1 = \pm\sqrt{x_2^2+1}$

N_{-1}: $x_1^2 - x_2^2 = -1 \iff x_2^2 = x_1^2 + 1 \iff x_2 = \pm\sqrt{x_1^2+1}$

3) Sind $p, q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen und $D = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid q(\underline{x}) \neq 0\}$, so ist $f: D \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})}$ eine rationale Funktion.

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$



5) Lineare Funktionen $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$, $f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$ mit $A \in M_{\ell,k}(\mathbb{R})$ (siehe Satz 59 (ii)).