2.4 Grenzwerte von Funktionen

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ sei Häufungspunkt von D und $f: D \to \mathbb{R}^\ell$. Man sagt $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{y} \; (\in \mathbb{R}^\ell)$ (oder auch $f(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} \underline{y}$) wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0, \text{ sodass } 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \; \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - \underline{y}\| < \varepsilon.$$

Satz 95 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ sei Häufungspunkt von D, $f: D \to \mathbb{R}^\ell$, $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_\ell(\underline{x}))$ und $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$. Dann sind äquivalent:

(i) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{y}$,

(ii) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = y_j$ für $1 \le j \le \ell$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0: 0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \; \underline{x} \in D \Rightarrow \|f(\underline{x}) - \underline{y}\| < \varepsilon$ und daher auch $|f_j(\underline{x}) - y_j| \le \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\ell} |f_i(\underline{x}) - y_i|^2} = \|f(\underline{x}) - \underline{y}\| < \varepsilon$ für $1 \le j \le \ell$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta_1, \ldots, \delta_\ell > 0$, sodass $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_j, \; \underline{x} \in D \implies |f_j(\underline{x}) - y_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\ell}}$ (für $1 \le j \le \ell$).

Es sei $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_\ell\}$. Für $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \; \underline{x} \in D$ gilt dann

$$\|f(\underline{x}) - \underline{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} |f_i(\underline{x}) - y_i|^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} \frac{\varepsilon^2}{\ell}} = \sqrt{\ell \cdot \frac{\varepsilon^2}{\ell}} = \varepsilon.$$

Satz 96 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^k$ sei Häufungspunkt von D, $f, g: D \to \mathbb{R}^\ell$, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^\ell$, $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{a}$ und $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = \underline{b}$. Dann gelten:

(i) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = \underline{a} + \underline{b}$,

(ii) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \langle f(\underline{x}), g(\underline{x}) \rangle = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$, insbesondere gilt im Fall $\ell = 1$:

Ist $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = a$ und $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = b$, so ist $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) g(\underline{x}) = a \cdot b$.

(iii) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \|f(\underline{x})\| = \|\underline{a}\|$,

(iv) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (\lambda f(\underline{x})) = \lambda \underline{a}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$,

(v) Ist $\ell = 1$ und $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = a \neq 0$, so ist $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{1}{f(\underline{x})} = \frac{1}{a}$.

Beweis: (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_1,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_2,\ \underline{x} \in D \implies \|g(\underline{x}) - \underline{b}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$, $\underline{x} \in D$ gilt dann

$$\|(f(\underline{x}) + g(\underline{x})) - (\underline{a} + \underline{b})\| \leq \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| + \|g(\underline{x}) - \underline{b}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Wir zeigen zunächst den Spezialfall $\underline{b} = \underline{0}$. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_1,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| < 1$$

(und daher $\|f(\underline{x})\| \leq \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| + \|\underline{a}\| < 1 + \|\underline{a}\|$)

und $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_2,\ \underline{x} \in D \implies \|g(\underline{x})\| < \dfrac{\varepsilon}{1 + \|\underline{a}\|}$.

Es sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$, $\underline{x} \in D$ gilt dann

$$|\langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle - \underbrace{\langle \underline{a}, \underline{b}\rangle}_{=0}| = |\langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle| \overset{\text{Satz 78}}{\leq} \|f(\underline{x})\| \cdot \|g(\underline{x})\|$$

$$< (1 + \|\underline{a}\|) \frac{\varepsilon}{1 + \|\underline{a}\|} = \varepsilon.$$

Es sei nun $\underline{b} \in \mathbb{R}^e$ beliebig. Wegen des bereits bewiesenen Spezialfalls ist

$$\langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle - \langle \underline{a}, \underline{b}\rangle = \langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle - \langle f(\underline{x}), \underline{b}\rangle + \langle f(\underline{x}), \underline{b}\rangle - \langle \underline{a}, \underline{b}\rangle$$

$$= \underbrace{\langle f(\underline{x}), \underbrace{g(\underline{x}) - \underline{b}}_{\to \underline{0}}\rangle}_{\to \langle \underline{a}, \underline{0}\rangle = 0} + \underbrace{\langle \underbrace{f(\underline{x}) - \underline{a}}_{\to \underline{0}}, \underline{b}\rangle}_{\to \langle \underline{0}, \underline{b}\rangle = 0} \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} 0$$

und daher $\langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} \langle \underline{a}, \underline{b}\rangle$

(iii) Aus (ii) folgt sofort $\langle f(\underline{x}), f(\underline{x})\rangle \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} \langle \underline{a}, \underline{a}\rangle$. Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion (die in der eindimensionalen reellen Analysis bewiesen wird) erhält man $\|f(\underline{x})\| = \sqrt{\langle f(\underline{x}), f(\underline{x})\rangle} \xrightarrow[\underline{x} \to \underline{x}_0]{} \sqrt{\langle \underline{a}, \underline{a}\rangle} = \|\underline{a}\|$.

(iv) Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Es sei daher jetzt $\lambda \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta > 0$, sodass $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ und daher

$$\|\lambda f(\underline{x}) - \lambda \underline{a}\| = \|\lambda (f(\underline{x}) - \underline{a})\| = |\lambda| \cdot \|f(\underline{x}) - \underline{a}\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

(v) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_1,\ \underline{x} \in D \implies |f(\underline{x}) - a| < \frac{\varepsilon a^2}{2}$$

und

$$0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta_2,\ \underline{x} \in D \implies |f(\underline{x}) - a| < \frac{|a|}{2}$$

Aus der zweiten Bedingung erhält man wegen $|a| - |f(\underline{x})| \leq |f(\underline{x}) - a| < \frac{|a|}{2}$, dass auch $|f(\underline{x})| > \frac{|a|}{2}$ gilt. Es sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Für $0 < \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$, $\underline{x} \in D$ gilt dann $\left|\frac{1}{f(\underline{x})} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|f(\underline{x}) - a|}{|a| \cdot |f(\underline{x})|} < \frac{\varepsilon a^2}{2} \cdot \frac{2}{|a|^2} = \varepsilon$.