2.5 Stetigkeit von Funktionen

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$. Dann heißt f stetig bei $\underline{x}_0$ wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ sodass $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta, \underline{x} \in D \Longrightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon$.

Satz 97 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$

(i) Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

(a) f ist stetig in $\underline{x}_0$,

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, sodass $f(B_\delta(\underline{x}_0) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\underline{x}_0))$,

(ii) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von D, so ist f stetig in $\underline{x}_0$,

(iii) Ist $\underline{x}_0$ ein Häufungspunkt von D, so sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

(a) f ist stetig in $\underline{x}_0$,

(b) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$,

(c) $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_j(\underline{x}) = f_j(\underline{x}_0)$ für $1 \le j \le l$ (wobei $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_l(\underline{x}))$).

Beweis: (i) Folgt sofort aus $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \iff \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}_0)$ und $\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon \iff f(\underline{x}) \in B_\varepsilon(f(\underline{x}_0))$.

(ii) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von D, so $\exists \delta > 0\ \forall \underline{x} \in D, \underline{x} \neq \underline{x}_0 : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \geq \delta$.
Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wählt man nun das eben gefundene $\delta > 0$, so ist die definierende Bedingung der Stetigkeit trivial erfüllt, denn $\underline{x}_0$ ist der einzige Punkt im $\mathbb{R}^k$, der die beiden Bedingungen $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$, $\underline{x} \in D$ erfüllt und $\|f(\underline{x}_0) - f(\underline{x}_0)\| = 0 < \varepsilon$.

(iii) (a) $\iff$ (b) Folgt sofort aus der Definition des Grenzwerts auf Seite 97 und der Definition der Stetigkeit im Punkt $\underline{x}_0$

(b) $\iff$ (c) Folgt sofort aus Satz 95.

Satz 98 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f, g: D \to \mathbb{R}^l$ seien beide in $\underline{x}_0$ stetig. Dann gilt

(i) $f + g: D \to \mathbb{R}^l$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) + g(\underline{x})$ ist in $\underline{x}_0$ stetig,

(ii) $D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \langle f(\underline{x}), g(\underline{x}) \rangle$ ist in $\underline{x}_0$ stetig.

(Insbesondere gilt im Fall $l = 1$: $f \cdot g: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ ist in $\underline{x}_0$ stetig.)

(iii) $D \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \|f(\underline{x})\|$ ist in $\underline{x}_0$ stetig,

(iv) $\lambda f: D \to \mathbb{R}^l$, $\underline{x} \mapsto \lambda f(\underline{x})$ ist in $\underline{x}_0$ stetig (mit $\lambda \in \mathbb{R}$),

(v) Ist $l=1$ und $f(\underline{x}_0) \neq 0$, so ist $\frac{1}{f} : D \setminus \{\underline{x} \in D \mid f(\underline{x}) = 0\} \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \longmapsto \frac{1}{f(\underline{x})}$ in $\underline{x}_0$ stetig

Beweis: (i) Ist $\underline{x}_0$ kein Häufungspunkt von D, so ist wegen Satz 97 (ii) nichts zu beweisen. Es sei darum $\underline{x}_0$ nun ein Häufungspunkt von D. Wegen Satz 97 (iii) gelten dann $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ und $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} g(\underline{x}) = g(\underline{x}_0)$. Mit Hilfe von Satz 96 (i) erhält man $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = f(\underline{x}_0) + g(\underline{x}_0)$.

(ii) – (v) Kann man analog beweisen.

Satz 99 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $E \subseteq \mathbb{R}^l$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ und $\underline{x}_0 \in D$. Ist f in $\underline{x}_0$ stetig und g in $f(\underline{x}_0)$ stetig, so ist $g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$ in $\underline{x}_0$ stetig.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Da g in $f(\underline{x}_0)$ stetig ist, $\exists\, \tau > 0$, sodass

$$\|y - f(\underline{x}_0)\| < \tau,\ y \in E \implies \|g(y) - g(f(\underline{x}_0))\| < \varepsilon.$$

Da f in $\underline{x}_0$ stetig ist, $\exists\, \delta > 0$, sodass

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \tau \implies \|g(f(\underline{x})) - g(f(\underline{x}_0))\| < \varepsilon.$$

Definition: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$.

1) f heißt stetig (auf D), wenn f in jedem Punkt $\underline{x} \in D$ stetig ist, d.h.

$$\forall \underline{x} \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \|y - \underline{x}\| < \delta,\ y \in D \implies \|f(y) - f(\underline{x})\| < \varepsilon.$$

2) f heißt gleichmäßig stetig (auf D), wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \text{ sodass für } \underline{x}, y \in D \text{ mit } \|\underline{x} - y\| < \delta \text{ stets } \|f(\underline{x}) - f(y)\| < \varepsilon \text{ gilt}$$

Bemerkung: Wie im eindimensionalen gelten:

1) Bei einer stetigen Funktion kann δ sowohl von $\underline{x}$ als auch von ε abhängen, bei einer gleichmäßig stetigen darf δ nur von ε abhängen.

2) Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt sofort Stetigkeit, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht. D.h. es gibt Funktionen, die stetig aber nicht gleichmäßig stetig sind.

3) Ob eine Funktion gleichmäßig stetig ist, hängt auch vom Definitionsbereich ab. Es ist möglich, dass eine Funktion auf einem Definitionsbereich D gleichmäßig stetig ist, aber nicht auf einem größeren Definitionsbereich E (d.h. $D \subsetneqq E$).

Beispiele: 1) Angenommen, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Dann ist für $1 \le j \le k$ auch die Funktion $F_j: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $F_j(\underline{x}) = F_j(x_1, \dots, x_k) = f(x_j)$ stetig:

Es sei $\varepsilon > 0$ und $\underline{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k}) \in \mathbb{R}^k$. Da f bei x_{0j} stetig ist,

$\exists \delta > 0$, sodass $|x_j - x_{0j}| < \delta \implies |f(x_j) - f(x_{0j})| < \varepsilon$.

Es sei nun $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$. Aus $|x_j - x_{0j}| \le \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ folgt

$|F_j(\underline{x}) - F_j(\underline{x}_0)| = |f(x_j) - f(x_{0j})| < \varepsilon$, dh F_j ist in $\underline{x}_0$ stetig.

Es sind also z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 e^x$ oder $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = (y^2 + 2y + 5) \sin y$ stetig.

2) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 \sin y, e^{x+y})$ ist stetig (dh $f_1(x,y) = x^2 \sin y$, $f_2(x,y) = e^{x+y}$).

Nach Beispiel 1) sind die Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \sin y$ stetig. Wegen Satz 98 (ii) folgt, dass auch $f_1(x,y) = x^2 \sin y$ stetig ist.

Nach Beispiel 1) sind die Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$ stetig. Wegen Satz 98 (i) folgt, dass auch die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$ stetig ist. Da die Exponentialfunktion stetig ist (was in der eindimensionalen reellen Analysis bewiesen wird), folgt aus Satz 99, dass auch $f_2(x,y) = e^{x+y}$ stetig ist.

Da $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig sind, folgt wegen Satz 97 (iii), dass f stetig ist.

3) Ist $p: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, dh

$$p(\underline{x}) = \sum_{i_1=0}^{d_1} \dots \sum_{i_k=0}^{d_k} a_{i_1, \dots, i_k} x_1^{i_1} \dots x_k^{i_k} \text{ mit } a_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{R} \ (\text{für } 0 \le i_1 \le d_1, \dots, 0 \le i_k \le d_k),$$

so ist p stetig. Das folgt aus Beispiel 1) und Satz 98 (i), (ii) und (iv).

4) Sind $p, q: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen und $q \neq 0$, so ist die rationale Funktion $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid q(\underline{x}) \neq 0\} \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \frac{p(\underline{x})}{q(\underline{x})}$ in jedem $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ mit der Eigenschaft $q(\underline{x}) \neq 0$ stetig. Das folgt aus Beispiel 3) und Satz 98 (ii) und (v).

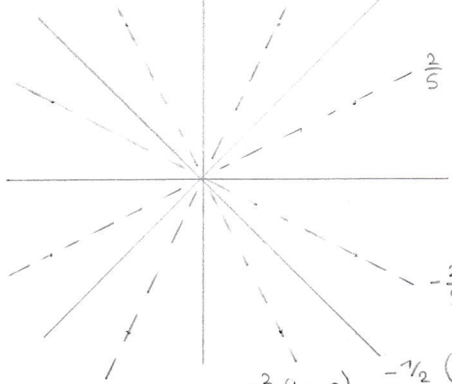
5) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nach Beispiel 4) ist f in jedem Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f aber nicht stetig. Ist $y = kx$ (für ein $k \in \mathbb{R}$) und $x \neq 0$, ist

$$f(x,y) = f(x,kx) = \frac{kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

d.h. f nimmt auf Geraden durch den Ursprung (diesen selbst ausgenommen) konstante Werte an:



Der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ kann nicht existieren, da f beliebig nahe bei $(0,0)$ verschiedene Werte (z.B. $-\frac{1}{2}$, 0 und $1/2$) annimmt. (Studiert man die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \mapsto \frac{k}{1+k^2}$ mit Hilfe von Resultaten der eindimensionalen reellen Analysis, so erkennt man, dass f beliebig nahe bei $(0,0)$ alle Werte im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ annimmt.)

1.12.2021

6) Jede lineare Funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ ist gleichmäßig stetig.

Ist $f(\underline{e}_1) = \dots = f(\underline{e}_k) = \underline{0}$, so ist $f(\underline{x}) = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k$ und die Behauptung ist trivial erfüllt. Falls nicht, so ist $M := \max\{\|f(\underline{e}_1)\|, \dots, \|f(\underline{e}_k)\|\} > 0$.

Ist $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \frac{\varepsilon}{kM}$, so erhält man

$$\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| = \|f(\underline{x} - \underline{x}_0)\| = \Big\|\sum_{j=1}^{k} (x_j - x_{0j}) \cdot f(\underline{e}_j)\Big\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|(x_j - x_{0j}) \cdot f(\underline{e}_j)\|$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \underbrace{|x_j - x_{0j}|}_{\leq \|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \cdot \underbrace{\|f(\underline{e}_j)\|}_{\leq M} \leq k \cdot \frac{\varepsilon}{kM} \cdot M = \varepsilon$$

(mit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_k)$ und $\underline{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$).

Satz 100 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $\underline{x}_0 \in D$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist in $\underline{x}_0$ stetig,

(ii) Für jede Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ in D mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_n) = f(\underline{x}_0)$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Es sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists \delta > 0$, derart dass

$$\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta,\ \underline{x} \in D \implies \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$ gilt: $\exists N \geq 1$, sodass $\|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \delta\ \forall n \geq N$. Es folgt, dass

$\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{x}_0)\| < \varepsilon\ \forall n \geq N$ und daher $\lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_n) = f(\underline{x}_0)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wenn f in $\underline{x}_0$ nicht stetig ist, so

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists \underline{x} \in D \text{ mit } \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \text{ aber } \|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)\| \geq \varepsilon$$

Insbesondere erhält man daraus, dass

$$\forall n \geq 1\ \exists \underline{x}_n \in D \text{ mit } \|\underline{x}_n - \underline{x}_0\| < \tfrac{1}{n} \text{ aber } \|f(\underline{x}_n) - f(\underline{x}_0)\| \geq \varepsilon.$$

Dh es gilt $\underline{x}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{x}_0$ aber $f(\underline{x}_n) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(\underline{x}_0)$.

Satz 101 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ und $f: D \to \mathbb{R}^l$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist stetig,

(ii) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, dann gibt es eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$, derart dass

$$f^{-1}(V) = D \cap U,$$

(Dh die Urbilder offener Mengen unter einer stetigen Abbildung sind – in diesem Sinn – offen.)

(iii) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^l$ abgeschlossen, dann gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$, derart dass $\quad f^{-1}(B) = D \cap A$,

(Dh die Urbilder abgeschlossener Mengen unter einer stetigen Abbildung sind – in diesem Sinn – abgeschlossen.)

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) Ist $\underline{x} \in f^{-1}(V)$, so ist $f(\underline{x}) \in V$. Da V offen ist,

$\exists \varepsilon(\underline{x}) > 0 : B_{\varepsilon(\underline{x})}(f(\underline{x})) \subseteq V$. Da f stetig ist, gilt wegen Satz 97 (i), dass

$\exists \delta(\underline{x}) > 0 : f(D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x})) \subseteq B_{\varepsilon(\underline{x})}(f(\underline{x})) \subseteq V$. Also ist

$D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) \subseteq f^{-1}(V)\ \ \forall \underline{x} \in f^{-1}(V)$. Setze nun $U := \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x})$.

Dann ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und

$$D \cap U = D \cap \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) = \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} \underbrace{(D \cap B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}))}_{\subseteq f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V).$$

Umgekehrt ist $f^{-1}(V) \subseteq D$ und $f^{-1}(V) \subseteq \bigcup_{\underline{x} \in f^{-1}(V)} B_{\delta(\underline{x})}(\underline{x}) = U$.

D.h. es gilt auch $f^{-1}(V) \subseteq D \cap U$ und insgesamt $f^{-1}(V) = D \cap U$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $\underline{x} \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da $B_\varepsilon(f(\underline{x}))$ offen ist, existiert nach Voraussetzung ein $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, derart dass $f^{-1}(B_\varepsilon(f(\underline{x}))) = D \cap U$.
Da U offen ist, $\exists \delta > 0: B_\delta(\underline{x}) \subseteq U$. Daraus folgt
$B_\delta(\underline{x}) \cap D \subseteq U \cap D = f^{-1}(B_\varepsilon(f(\underline{x})))$ und daher $f(B_\delta(\underline{x}) \cap D) \subseteq B_\varepsilon(f(\underline{x}))$.
Nach Satz 97 (i) ist f in $\underline{x}$ stetig. Da $\underline{x} \in D$ beliebig war, ist f stetig.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^l$ abgeschlossen, so ist $\mathbb{R}^l \setminus B$ offen und nach Voraussetzung $\exists U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, derart dass $f^{-1}(\mathbb{R}^l \setminus B) = U \cap D$. Dann ist $f^{-1}(B) = (\mathbb{R}^k \setminus U) \cap D$, wobei $A := \mathbb{R}^k \setminus U \ (\subseteq \mathbb{R}^k)$ abgeschlossen ist.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Ist $V \subseteq \mathbb{R}^l$ offen, so ist $\mathbb{R}^l \setminus V$ abgeschlossen und nach Voraussetzung $\exists A \subseteq \mathbb{R}^k$ abgeschlossen, derart dass $f^{-1}(\mathbb{R}^l \setminus V) = A \cap D$.
Dann ist $f^{-1}(V) = (\mathbb{R}^k \setminus A) \cap D$, wobei $U := \mathbb{R}^k \setminus A$ offen ist.

<u>Beispiele</u>: 1) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Wir betrachten $f^{-1}((\alpha, \beta))$ mit $\alpha < \beta$:

$$f^{-1}((\alpha,\beta)) = \begin{cases} (-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}) \cup (\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}) & \text{falls } 0 \le \alpha < \beta \\ \quad (\text{insbesondere ist } f^{-1}((0,\beta)) = (-\sqrt{\beta}, 0) \cup (0, \sqrt{\beta}) \text{ im Fall } \alpha = 0) & \\ (-\sqrt{\beta}, \sqrt{\beta}) & \text{falls } \alpha < 0 < \beta \\ \emptyset & \text{falls } \alpha < \beta \le 0 \end{cases}$$

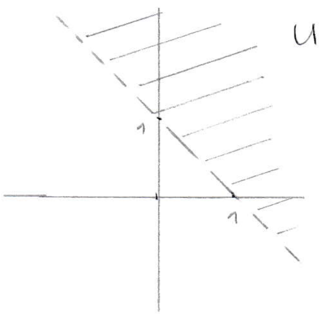
2) Ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$, so ist $f^{-1}((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) = \{0\}$

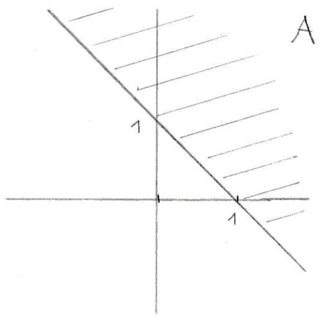
(Die Funktion $f = \operatorname{sgn}$ ist bei 0 nicht stetig, $(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$ ist ein offenes Intervall, aber $f^{-1}((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})) = \{0\}$ ist nicht offen.)

<u>Bemerkung</u>: Die einfachste Möglichkeit, zu zeigen, dass eine Menge offen bzw. abgeschlossen ist, ist oft, zu beweisen, dass sie das Urbild einer offenen bzw. abgeschlossenen Teilmenge unter einer stetigen Abbildung ist.

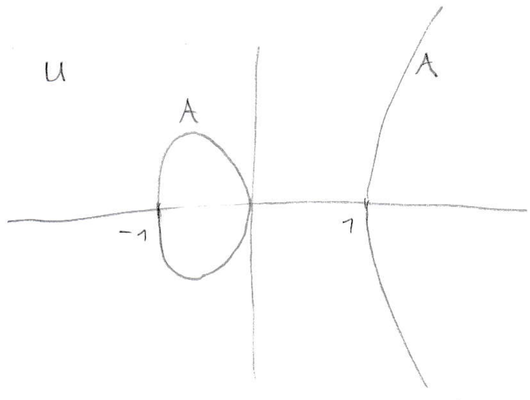
Beispiele: 1) Für $1 \leq i \leq k$ sei $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f_i(\underline{x}) = x_i$. Aus Satz 101 folgt, dass H_i^{c+} und H_i^{c-} offen sind, da $H_i^{c+} = f_i^{-1}((c,+\infty))$ und $H_i^{c-} = f_i^{-1}((-\infty,c))$. Ebenso folgt, dass $\overline{H}_i^{c+}$ und $\overline{H}_i^{c-}$ abgeschlossen sind, da $\overline{H}_i^{c+} = f_i^{-1}([c,+\infty))$ und $\overline{H}_i^{c-} = f_i^{-1}((-\infty,c])$.

2) Es sei $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 1\}$ und $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 1\}$.
Die Menge U ist offen (bzw. die Menge A abgeschlossen), da die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$ stetig ist und $U = f^{-1}((1,+\infty))$ (bzw. $A = f^{-1}([1,+\infty))$).





3) Es sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$ und $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \neq x^3 - x\}$.
Die Menge A ist abgeschlossen (bzw. die Menge U offen), da die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2 - x^3 + x$ stetig ist und $A = f^{-1}(\{0\})$ (bzw. $U = f^{-1}((-\infty,0) \cup (0,+\infty))$). ($A$ ist eine sogenannte elliptische Kurve.)



Satz 102 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist $f(K)$ $(\subseteq \mathbb{R}^l)$ kompakt.

Beweis: Es sei $(y_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $f(K)$. Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $\underline{x}_n \in K$ mit der Eigenschaft $f(\underline{x}_n) = y_n$. Da K kompakt ist, besitzt die Folge $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Satz 92 eine konvergente Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j \geq 1}$ mit $\lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} = \underline{a} \in K$. Da f stetig ist, folgt wegen Satz 100 $\lim_{j\to\infty} y_{n_j} = \lim_{j\to\infty} f(\underline{x}_{n_j}) = f(\underline{a}) \in f(K)$,

d.h. $(y_{n_j})_{j\geq 1}$ ist eine konvergente Teilfolge von $(y_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert in $f(K)$.
Wegen Satz 92 ist $f(K)$ kompakt.

Korollar 103 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\underline{a}^+, \underline{a}^- \in K$, derart dass $f(\underline{a}^+) = \max_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$ und $f(\underline{a}^-) = \min_{\underline{x}\in K} f(\underline{x})$.
D.h. eine stetige Funktion nach $\mathbb{R}$ nimmt auf einer kompakten Menge ihr Maximum und ihr Minimum an.

Beweis: Nach Satz 102 ist $f(K)$ $(\subseteq \mathbb{R})$ kompakt und daher beschränkt.
Also existieren $\sup f(K) = \sup_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) =: M$ und $\inf f(K) = \inf_{\underline{x}\in K} f(\underline{x}) =: m$.
Es gilt nun: $\forall n\geq 1 \; \exists \underline{x}_n \in K : M - \frac{1}{n} < f(\underline{x}_n) \leq M$. Die Folge $(f(\underline{x}_n))_{n\geq 1}$ ist konvergent mit Grenzwert $M = \lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_n)$. Da $f(K)$ kompakt ist, ist es abgeschlossen und daher $M \in f(K)$. Also $\exists \underline{a}^+ \in K : f(\underline{a}^+) = M$.
Die Existenz von $\underline{a}^-$ beweist man analog.

Beispiele: 1) Korollar 103 verallgemeinert die folgende Aussage aus der eindimensionalen reellen Analysis: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so nimmt die Funktion f auf $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an.
2) Ist $K := [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \in M_2(\mathbb{R})$ und $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\underline{x}) = A\cdot\underline{x}$, so ist K kompakt und f stetig (da linear). Nach Satz 102 ist $f(K)$ $(\subseteq \mathbb{R}^2)$ kompakt, also beschränkt und abgeschlossen.
3) Ist $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$ und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig, so nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an. (Da jede Abbildung $f: K \to \mathbb{R}$ nach Satz 97 (ii) in allen Punkten $\frac{1}{n} \in K$ stetig ist, entscheidet sich die Stetigkeit im Wesentlichen dadurch ob $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$ gilt.)

6.12.2021

Satz 104 Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}^\ell$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis: Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so würde gelten, dass

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists \underline{x}_\delta, \underline{y}_\delta \in K \text{ mit } \|\underline{x}_\delta - \underline{y}_\delta\| < \delta \text{ und } \|f(\underline{x}_\delta) - f(\underline{y}_\delta)\| \geq \varepsilon$$

Insbesondere würde gelten, dass

$\forall n \geq 1 \quad \exists\, \underline{x}_n, \underline{y}_n \in K$ mit $\|\underline{x}_n - \underline{y}_n\| < \frac{1}{n}$ und $\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{y}_n)\| \geq \varepsilon$.

Da K kompakt ist, besitzt $(\underline{x}_n)_{n\geq 1}$ nach Satz 92 eine Teilfolge $(\underline{x}_{n_j})_{j\geq 1}$ mit Grenzwert $\underline{a} := \lim_{j\to\infty} \underline{x}_{n_j} \in K$. Weil

$$\|\underline{y}_{n_j} - \underline{a}\| \leq \underbrace{\|\underline{y}_{n_j} - \underline{x}_{n_j}\|}_{< \frac{1}{n_j} \to 0} + \underbrace{\|\underline{x}_{n_j} - \underline{a}\|}_{\to 0} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

gilt auch $\lim_{j\to\infty} \underline{y}_{n_j} = \underline{a}$. Da f stetig ist, folgt wegen Satz 100

$\lim_{j\to\infty} f(\underline{x}_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} f(\underline{y}_{n_j}) = f(\underline{a})$ und daher $\lim_{j\to\infty} \left(f(\underline{x}_{n_j}) - f(\underline{y}_{n_j})\right) = \underline{0}$.

Das widerspricht $\|f(\underline{x}_n) - f(\underline{y}_n)\| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$.

<u>Bemerkung</u>: Satz 104 verallgemeinert einen Satz aus der eindimensionalen reellen Analysis, der besagt, dass eine stetige Funktion $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.