2.6 Partielle Ableitungen

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Existiert die Ableitung der Funktion $x_1 \mapsto f(x_1, a_2, \ldots, a_k)$ an der Stelle a_1 (im Sinn der eindimensionalen reellen Analysis), d.h. existiert der Grenzwert

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, a_2, \ldots, a_k) - f(a_1, a_2, \ldots, a_k)}{x_1 - a_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_k) - f(a_1, a_2, \ldots, a_k)}{h},$$

so nennt man ihn die partielle Ableitung von f nach der Veränderlichen x_1 an der Stelle $\underline{a}$. Wir schreiben dafür $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_k)$.

Völlig analog definiert man $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})$.

Bemerkung: Für partielle Ableitungen werden auch andere Notationen verwendet, z.B. $D_1 f(\underline{a})$ oder $f_{x_1}(\underline{a})$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})$ (oder allgemeiner $D_i f(\underline{a})$ oder $f_{x_i}(\underline{a})$ statt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$).

Beispiel: Wenn man eine Funktion partiell nach x_i ableitet, behandelt man die anderen Veränderlichen (d.h. $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$) wie Konstante. Ist z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$, so sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 \cos(xy) \cdot y = 2x + y^3 \cos(xy)$$

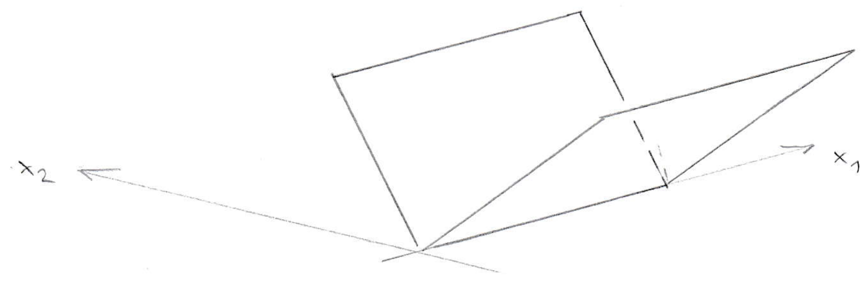
und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin(xy) + y^2 \cos(xy) \cdot x = 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy).$$

Bemerkungen: 1) Aus der Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a})$ folgt nicht die Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{a})$ (bzw. allgemeiner folgt aus der Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ nicht die Existenz von $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{a})$ für $j \neq i$): Ist z.B. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = |x_2|$, so ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

und
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_2 > 0 \\ -1 & \text{falls } x_2 < 0 \end{cases}$$

aber $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, 0)$ existiert für kein $x_1 \in \mathbb{R}$, da die Betragsfunktion bei 0 nicht differenzierbar ist.

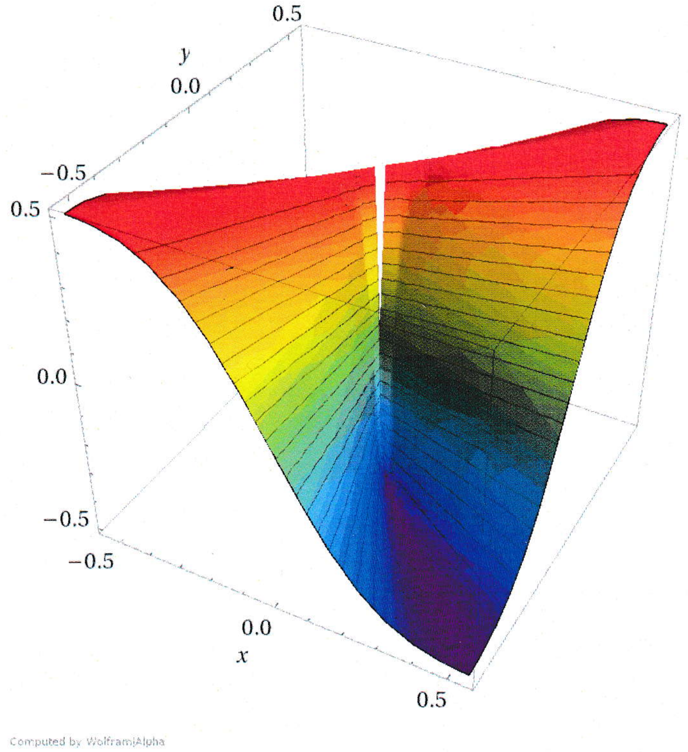


2) Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt folgt nicht die Stetigkeit in diesem Punkt. Es sei z. B.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Funktion f im Punkt $(0,0)$ nicht stetig ist (siehe Seite 103). Es gilt aber

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad \text{und analog } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$



3) Für partielle Ableitungen gelten offensichtlich alle Rechenregeln für Ableitungen, die aus der eindimensionalen reellen Analysis bekannt sind, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g - f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}\right).$$

<u>Definition</u>: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in U$ und $f: U \to \mathbb{R}$. Existiert $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})$ für $1 \le i \le k$, so kann man den (Zeilen)Vektor $\operatorname{grad} f(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{a})\right)$ bilden, der Gradient von f bei $\underline{a}$ genannt wird.

<u>Bemerkung</u>: Man schreibt für den Gradienten auch $\nabla f(\underline{a})$, wobei $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ Nabla-Operator genannt wird.

Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_k^2}$. Für $\underline{x} \in \mathbb{R} \setminus \{\underline{0}\}$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_k^2}} = \frac{x_i}{\|\underline{x}\|} \quad \text{für } 1 \leq i \leq k$$

und daher $\operatorname{grad} f(\underline{x}) = \frac{1}{\|\underline{x}\|}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{\|\underline{x}\|}\underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\underline{0}\}$.

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\underline{a} \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ und $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ sei ein Einheitsvektor, d.h. $\|\underline{u}\| = 1$. Wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{a} + t\underline{u}) - f(\underline{a})}{t}$$

existiert, wird er Richtungsableitung von f an der Stelle $\underline{a}$ in Richtung $\underline{u}$ genannt. Wir schreiben dafür $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{a})$ oder $D_{\underline{u}} f(\underline{a})$.

Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ und $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\left(x + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - xy\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\cancel{xy} + \frac{(x+y)t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - \cancel{xy}\right)$$

$$= \lim_{t \to 0}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2}\right) = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

Bemerkungen: 1) Partielle Ableitungen sind spezielle Richtungsableitungen, nämlich für $\underline{u} = \underline{e}_i$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial f}{\partial \underline{e}_i}(\underline{a})$.

2) Aus der Existenz aller Richtungsableitungen $\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\underline{a})$ (d.h. $\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^k$ mit $\|\underline{u}\| = 1$) in einem Punkt $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ folgt nicht die Stetigkeit der Funktion f in diesem Punkt $\underline{a}$. Es sei z.B.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wir betrachten die Richtungsableitungen in Richtung $\underline{u} = (u_1, u_2)$ an der Stelle $\underline{a} = (0,0)$. Ist $u_1 \neq 0$ und $u_2 \neq 0$, so ist

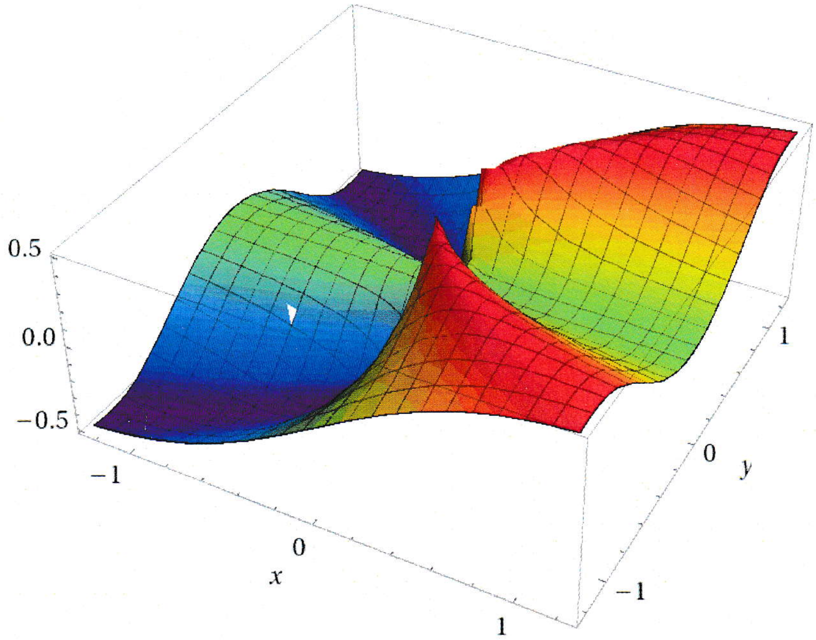
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(t\underline{u}) - f(\underline{0})\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 u_1 u_2^2}{t^2 u_1^2 + t^4 u_2^4} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 u_1 u_2^2}{t^2 u_1^2 + t^4 u_2^4}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2 + t^2 u_2^4} = \frac{u_1 u_2^2}{u_1^2} = \frac{u_2^2}{u_1} = \frac{1 - u_1^2}{u_1} = \frac{1}{u_1} - u_1$$

Ist $u_1 = 0$ (d.h. $\underline{u} = (0, \pm 1)$) oder $u_2 = 0$ (d.h. $\underline{u} = (\pm 1, 0)$), so ist

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(t\underline{u}) - f(\underline{0})\right) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(0-0) = 0.$$

Die Funktion f ist bei $(0,0)$ aber nicht stetig. Für $x = 0$ oder $y = 0$ ist $f(x,y) = 0$. Auf der „Parabel mit Loch" $x = y^2 \, (\neq 0)$ ist aber $f(x,y) = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$. D.h. die Funktion f nimmt beliebig nahe beim Nullpunkt auch den Wert $\frac{1}{2}$ an.



Computed by Wolfram|Alpha

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f: U \to \mathbb{R}$. Wenn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ für ein i mit $1 \le i \le k$ für alle $\underline{x} \in U$ existiert, so erhält man eine auf U definierte Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$. Existiert von dieser Funktion in einem Punkt $\underline{a} \in U$ wieder eine partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a})$ (für ein j mit $1 \le j \le k$), so nennt man sie partielle Ableitung 2. Ordnung und schreibt dafür

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\underline{a}).$$ Ist $i = j$, so schreibt man $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underline{a})$.

In anderen Notationen schreibt man $D_j D_i f(\underline{a}) = D_j(D_i f)(\underline{a})$ bzw.

$$f_{x_i x_j}(\underline{a}) = (f_{x_i})_{x_j}(\underline{a}).$$

Sind die partiellen Ableitungen 2. Ordnung überall definiert und besitzen selbst wieder partielle Ableitungen, so kann man partielle Ableitungen 3., 4. bzw. allgemein n-ter Ordnung bilden.

Für $n \geq 2$ ist also

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}}(\underline{a}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}}\right)(\underline{a})$$

(mit $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k$). In anderen Notationen schreibt man dafür

$$D_{i_n} \cdots D_{i_1} f(\underline{a}) = D_{i_n}(D_{i_{n-1}} \cdots D_{i_1} f)(\underline{a})$$

bzw. $f_{x_{i_1} \cdots x_{i_n}}(\underline{a}) = (f_{x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}(\underline{a})$.

<u>Bemerkung</u>: Manchmal findet man auch die Notation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$. Für „hinreichend schönes" f macht die Reihenfolge der partiellen Ableitungen tatsächlich keinen Unterschied, d.h. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, siehe nachfolgend Satz 106 und Korollar 107 (Satz von Schwarz).

<u>Beispiele</u>: 1) Für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$ haben wir bereits

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^3\cos(xy) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin(xy) + xy^2\cos(xy)$$

berechnet (siehe Seite 109). Alle partiellen Ableitungen 2. Ordnung existieren für diese Funktion f in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und es gelten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - y^4\sin(xy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3y^2\cos(xy) - xy^3\sin(xy),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y^2\cos(xy) + y^2\cos(xy) - xy^3\sin(xy) = 3y^2\cos(xy) - xy^3\sin(xy)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2\sin(xy) + 2xy\cos(xy) + 2xy\cos(xy) - x^2y^2\sin(xy) \\ &= (2 - x^2y^2)\sin(xy) + 4xy\cos(xy).\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ gilt. Allerdings war $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ schneller und einfacher zu berechnen als $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2) Dieses Beispiel zeigt, dass es bei partiellen Ableitungen zweiter Ordnung durchaus auf die Reihenfolge der Ableitungen ankommen kann. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Einerseits ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^4+4x^2y^2-y^4)y}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{1}{h}\left(-\frac{h^5}{h^4}-0\right)}_{=-1} = -1.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-3x^3y^2+x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{für } (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

und daher

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4}-0\right)}_{=1} = 1.$$

Insgesamt gilt also $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ aber $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$

13.12.2021

<u>Definition</u>: Es sei $U\subseteq\mathbb{R}^k$ offen und $f: U\to\mathbb{R}$. Wenn auf U alle partiellen Ableitungen von f bis zur m-ten Ordnung existieren und alle stetig sind, dann sagt man, f sei eine C^m-Funktion und schreibt dafür kurz $f\in C^m(U)$.
(Dh. $C^m(U)$ bezeichnet die Menge aller C^m-Funktionen $f: U\to\mathbb{R}$.)

Definition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}^l$ und $f_1, \dots, f_l : U \to \mathbb{R}$ die Koordinatenfunktionen von f (d.h. $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_l(\underline{x}))$ $\forall x \in U$). Man sagt, f sei eine C^m-Funktion wenn die Koordinatenfunktionen $f_1, \dots, f_l$ es sind, d.h. wenn $f_1, \dots, f_l \in C^m(U)$. Man schreibt dafür $f \in C^m(U, \mathbb{R}^l)$. (D.h. $C^m(U, \mathbb{R}^l)$ bezeichnet die Menge aller C^m-Funktionen $f: U \to \mathbb{R}^l$.)

Lemma 105 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^2(U)$. Ist $[a,b] \times [c,d] \subseteq U$, so $\exists (\xi, \eta) \in (a,b) \times (c,d)$, derart dass

$$\Box f(a,b,c,d) := f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot (b-a) \cdot (d-c)$$

Beweis: Es sei $F(x) := f(x,d) - f(x,c)$. Dann ist

$$F(b) - F(a) = \big(f(b,d) - f(b,c)\big) - \big(f(a,d) - f(a,c)\big) = \Box f(a,b,c,d).$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x}$ auf U existiert, existiert $F'(x)$ auf $[a,b]$ und $F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,c)$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es $\xi \in (a,b)$, derart dass

$$\Box f(a,b,c,d) = F(b) - F(a) = F'(\xi) \cdot (b-a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, c)\right) \cdot (b-a).$$

Die Abbildung $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$ erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Daher gibt es ein $\eta \in (c,d)$, derart dass

$$F'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, d) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, c) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot (d-c)$$

Daraus folgt

$$\Box f(a,b,c,d) = F'(\xi) \cdot (b-a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot (b-a)(d-c).$$

Bemerkungen: 1) Lemma 105 ist eine zweidimensionale Version des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

2) Aus Symmetriegründen gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 105 auch:

$$\exists (\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in (a,b) \times (c,d) : \Box f(a,b,c,d) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \cdot (b-a) \cdot (d-c).$$

Satz 106 (Satz von Schwarz für $m=2$) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^2(U)$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in U.$$

Beweis: Es sei $(a,b) \in U$. Wähle ein $h > 0$, derart dass $[a, a+h] \times [b, b+h] \subseteq U$.

Nach Lemma 105 gibt es $(\xi,\eta), (\bar\xi,\bar\eta) \in (a,a+h)\times(b,b+h)$ mit der Eigenschaft

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \Box f(a,a+h,b,b+h) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar\xi,\bar\eta)$$

und daher $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar\xi,\bar\eta)$. Lasse nun $h \to 0+$ gehen. Dann geht auch $(a+h, b+h) \to (a,b)$ und daher $(\xi,\eta)\to(a,b)$ und $(\bar\xi,\bar\eta)\to(a,b)$. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ folgen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi,\eta) \xrightarrow[h\to 0+]{} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar\xi,\bar\eta) \xrightarrow[h\to 0+]{} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b).$$

D.h. es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$. Da $(a,b)\in U$ beliebig war, ist damit die Behauptung bewiesen.

<u>Korollar 107</u> (Satz von Schwarz für beliebiges $m \geq 2$) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f \in C^m(U)$, so kommt es bei partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq m$ von f nicht auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen an.

<u>Beweisskizze</u>: Die Gleichung $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (für $1 \leq i,j \leq k$ und $i \neq j$) folgt durch Anwendung von Satz 106 auf die Variablen x_i und x_j.

Bei Ableitungen höherer Ordnung kann man nach Satz 106 je zwei unmittelbar aufeinander folgende Ableitungen vertauschen. Durch sukzessives Vertauschen kann man nun zeigen, dass partielle Ableitungen höherer Ordnung übereinstimmen, die sich nur durch die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unterscheiden.