2.9 Das mehrdimensionale Riemann-Integral

Definitionen: 1) Es seien $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, \ldots, a_k \le b_k$ reelle Zahlen. Eine Menge $Q (\subseteq \mathbb{R}^k)$ der Gestalt

$$Q = \{\underline{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ für } 1 \le i \le k\} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$$

wird Quader (oder k-dimensionales Intervall) genannt.

2) Dem Quader $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ ordnet man den Inhalt

$$v(Q) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_k - a_k) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i) \text{ zu.}$$

3) Eine Zerlegung Z eines Intervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ist eine endliche Menge $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \subseteq [a, b]$ mit der Eigenschaft $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Die Punkte $t_0, t_1, \ldots, t_n$ werden Teilungspunkte der Zerlegung Z genannt, die Intervalle $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ werden Teilungsintervalle der Zerlegung Z genannt.

4) Eine Zerlegung Z eines Quaders $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i]$ ist gegeben durch Zerlegungen $Z_1, \ldots, Z_k$ der Intervalle $[a_1, b_1], \ldots, [a_k, b_k]$, also

$$Z_1 = \{t_0^1, t_1^1, \ldots, t_{n_1}^1\} \quad \text{mit } a_1 = t_0^1 < t_1^1 < \cdots < t_{n_1}^1 = b_1,$$

$$Z_2 = \{t_0^2, t_1^2, \ldots, t_{n_2}^2\} \quad \text{mit } a_2 = t_0^2 < t_1^2 < \cdots < t_{n_2}^2 = b_2,$$

$$\ldots$$

$$Z_k = \{t_0^k, t_1^k, \ldots, t_{n_k}^k\} \quad \text{mit } a_k = t_0^k < t_1^k < \cdots < t_{n_k}^k = b_k$$

und besteht aus den $n = n_1 \cdots n_k$ Quadern $Q_{i_1, \ldots, i_k} = [t_{i_1-1}^1, t_{i_1}^1] \times \cdots \times [t_{i_k-1}^k, t_{i_k}^k]$ (mit $1 \le i_j \le n_j$ für $1 \le j \le k$).

Bemerkungen: 1) Um die Notation nicht unnötig kompliziert werden zu lassen, werden ab jetzt meistens schreiben, dass die Zerlegung Z des Quaders Q aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$ besteht. D.h. wir schreiben, wann immer es möglich ist, Q_i (mit $1 \le i \le n$) statt $Q_{i_1, \ldots, i_k}$ (mit $1 \le i_j \le n_j$, $1 \le j \le k$).

2) Wird der Quader Q durch die Zerlegung Z in die Quader $Q_1, \ldots, Q_n$ zerlegt, so gelten offensichtlich $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ und $v(Q) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)$.

12.1.2022

Definition 1) Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Z, Z' zwei Zerlegungen von $[a,b]$. Dann heißt Z' feiner als Z wenn $Z \subseteq Z'$.

2) Es sei $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und Z, Z' zwei Zerlegungen von Q. Ist Z gegeben durch Zerlegungen Z_1 von $[a_1,b_1], \dots, Z_k$ von $[a_k,b_k]$ und Z' gegeben durch Zerlegungen Z_1' von $[a_1,b_1], \dots, Z_k'$ von $[a_k,b_k]$, so heißt Z' feiner als Z wenn Z_i' feiner ist als Z_i (als Zerlegungen von $[a_i,b_i]$) für $1 \le i \le k$.

Bemerkungen: 1) Ist Z eine Zerlegung des Quaders Q, die aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_n$ besteht, und Z' eine Zerlegung des Quaders Q, die feiner als Z ist, so zerfällt jeder Quader Q_i beim Übergang zu Z' in Teilquader $Q_{i,1}', \dots, Q_{i,n_i}'$ der Zerlegung Z' mit den Eigenschaften $Q_i = Q_{i,1}' \cup \dots \cup Q_{i,n_i}'$ und $v(Q_i) = v(Q_{i,1}') + \dots + v(Q_{i,n_i}')$.

2) Sind Z' und Z'' zwei Zerlegungen des Quaders $Q = \prod_{i=1}^{k} [a_i,b_i]$, so existiert stets eine gemeinsame Verfeinerung, dh eine Zerlegung Z des Quaders Q, die feiner als Z' und feiner als Z'' ist. (Sind Z' bzw. Z'' durch Zerlegungen Z_i' bzw. Z_i'' von $[a_i,b_i]$ gegeben, so sei $Z_i := Z_i' \cup Z_i''$ Zerlegung von $[a_i,b_i]$ und Z durch $Z_1, \dots, Z_k$ gegeben.)

Definition: Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z eine Zerlegung von Q in Teilquader $Q_1, \dots, Q_n$, so definiert man die Untersumme $U(f,Z)$ bzw. die Obersumme $O(f,Z)$ durch

$$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right) \cdot v(Q_i) \quad \text{bzw.} \quad O(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right) \cdot v(Q_i).$$

Lemma 128 Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z und Z' zwei Zerlegungen von Q und Z' feiner als Z. Dann gilt

$$U(f,Z) \le U(f,Z') \le O(f,Z') \le O(f,Z).$$

Beweis: 1. Ungleichung: Die Zerlegung Z bestehe aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_n$. Der Quader Q_i zerfalle beim Übergang zu Z' in die Quader $Q_{i,1}, \dots, Q_{i,n_i}$ (für $1 \le i \le n$). Offensichtlich gilt $\inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \le \inf_{\underline{x} \in Q_{i,j}} f(\underline{x})$ für $1 \le j \le n_i$.

Daraus erhält man

$$v(Q_i)\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j})\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) \le \sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j})\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_{i,j}} f(\underline{x})$$

und daher

$$U(f,Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i)\inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j})\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_{i,j}} f(\underline{x}) = U(f,Z')$$

2. Ungleichung

$$U(f,Z') = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j})\cdot \inf_{\underline{x}\in Q_{i,j}} f(\underline{x}) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n_i} v(Q_{i,j})\cdot \sup_{\underline{x}\in Q_{i,j}} f(\underline{x}) = O(f,Z')$$

3. Ungleichung: Analog wie 1. Ungleichung

<u>Korollar 129</u> Es sei $Q\subseteq\mathbb{R}^k$ ein Quader, $f: Q\to\mathbb{R}$ beschränkt und Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von Q. Dann gelten:

(i) Ist Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so ist

$$U(f,Z_1)\le U(f,Z)\le O(f,Z)\le O(f,Z_2),$$

(ii) $U(f,Z_1)\le O(f,Z_2)$.

<u>Beweis</u>: (i) Folgt sofort aus Lemma 128.

(ii) Folgt sofort aus (i).

<u>Definitionen</u>: Es sei Q ein Quader und $f: Q\to\mathbb{R}$ beschränkt.

1) Die Zahl $\underline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \sup\{U(f,Z)\mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\} = \sup_Z U(f,Z)$ wird das untere Integral von f genannt. (Ist Z_0 irgendeine Zerlegung von Q, so ist (nach Korollar 129 (ii)) $U(f,Z)\le O(f,Z_0)$ für jede Zerlegung Z von Q. Also ist die Menge $\{U(f,Z)\mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Daher existiert ihr Supremum.)

2) Die Zahl $\overline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \inf\{O(f,Z)\mid Z \text{ ist Zerlegung von } Q\} = \inf_Z O(f,Z)$ wird das obere Integral von f genannt. (Die Existenz des Infimums kann man analog zur Existenz des Supremums beim unteren Integral begründen.)

3) Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar (oder kurz: integrierbar) auf Q, wenn es <u>genau</u> eine Zahl $I\in\mathbb{R}$ gibt, derart dass $U(f,Z_1)\le I\le O(f,Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q. Man nennt dann I das Integral der Funktion f auf Q und schreibt dafür $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(x_1,\dots,x_k)\,d(x_1,\dots,x_k)$.

<u>Lemma 130</u> Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt

$$\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}.$$

<u>Beweis</u>: Angenommen, es wäre $\delta := \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} - \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} > 0$. Nach Definition des unteren und des oberen Integrals gibt es Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q, derart dass

$$\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} - \frac{\delta}{2} < U(f, Z_1) \leq \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

bzw.

$$\overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq O(f, Z_2) < \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} + \frac{\delta}{2}.$$

Es sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2. Aus Korollar 129 (i) folgt

$$O(f, Z) \leq O(f, Z_2) < \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} + \frac{\delta}{2} = \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} - \frac{\delta}{2} < U(f, Z_1) \leq U(f, Z),$$

was unmöglich ist.

<u>Satz 131</u> Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Riemann-integrierbar,

(ii) $\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$.

Gelten (i) und (ii), so ist $\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} = \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$.

<u>Beweis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) Angenommen, es wäre $\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} < \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$. Ist $I \in \mathbb{R}$ eine Zahl, die $\underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq I \leq \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$ erfüllt, so gilt für alle Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q, dass $U(f, Z_1) \leq \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq I \leq \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq O(f, Z_2)$. Da es unendlich viele derartige I gibt, ist f nicht Riemann-integrierbar.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es sei $I := \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x}$. Sind Z_1 und Z_2 Zerlegungen von Q, so gilt $U(f, Z_1) \leq \underline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} = I = \overline{\int_Q} f(\underline{x})\, d\underline{x} \leq O(f, Z_2)$ und I ist die einzige reelle Zahl, die $U(f, Z_1) \leq I \leq O(f, Z_2)$ für alle Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q erfüllt.

__Satz 132__ Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(i) f ist Riemann-integrierbar,

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Zerlegungen Z_1, Z_2 von Q, derart dass $O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \varepsilon$,

(iii) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ Zerlegung Z von Q, derart dass $O(f, Z) - U(f, Z) < \varepsilon$.

__Beweis__: (i) $\Rightarrow$ (ii) Nach Satz 131 ist $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$. Wähle Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q, derart dass

$$\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \frac{\varepsilon}{2} < U(f, Z_1) \le \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$$

und

$$\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \le O(f, Z_2) < \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann folgt

$$O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2} - \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Ist Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, so folgt wegen Korollar 129 (i) $O(f, Z) - U(f, Z) \le O(f, Z_2) - U(f, Z_1) < \varepsilon$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ist f nicht Riemann-integrierbar, so muss wegen Lemma 130 und Satz 131 $\underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} < \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$ gelten. Wähle ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $\varepsilon < \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$. Für jede Zerlegung Z von Q gilt dann $O(f, Z) - U(f, Z) \ge \overline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \underline{\int}_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} > \varepsilon$, d.h. (iii) kann für solche $\varepsilon > 0$ nicht erfüllt werden.

__Satz 133__ Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Riemann-integrierbar.

__Beweis__: Der Quader Q ist kompakt und f daher nach Korollar 103 beschränkt. Nach Satz 104 ist f sogar gleichmäßig stetig. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, derart dass

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| < \delta \implies |f(\underline{x}) - f(\underline{y})| < \frac{\varepsilon}{v(Q)} \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in Q.$$

Wähle nun eine Zerlegung Z von Q in Teilquader $Q_1, \ldots, Q_n$, die so fein ist, dass jeder Quader Q_i in einer offenen Kugel $B_{\delta/2}(\underline{x}_i)$ (für ein gewisses $\underline{x}_i \in Q_i$) enthalten ist. (Es ist anschaulich klar, dass das möglich ist. Auf die Ausarbeitung der technischen Details verzichten wir.) Sind nun $\underline{x}, \underline{y} \in Q_i$, so folgt $\|\underline{x}-\underline{y}\| \leq \|\underline{x}-\underline{x}_i\| + \|\underline{y}-\underline{x}_i\| < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$ und daher

$|f(\underline{x})-f(\underline{y})| < \frac{\varepsilon}{v(Q)}$. Da f stetig ist, nimmt es nach Korollar 103 auf Q_i Minimum und Maximum an, d.h. für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ existieren $\underline{x}_i^+, \underline{x}_i^- \in Q_i$ mit den Eigenschaften $f(\underline{x}_i^-) = \min\limits_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x})$ bzw. $f(\underline{x}_i^+) = \max\limits_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x})$.

Daher ist

$$O(f,Z) - U(f,Z) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(f(\underline{x}_i^+)-f(\underline{x}_i^-)\right)}_{< \frac{\varepsilon}{v(Q)}} \cdot v(Q_i) < \frac{\varepsilon}{v(Q)} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n v(Q_i)}_{= v(Q)} = \varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 132.

<u>Bemerkung</u>: Mit Satz 133 erhält man mit einem Schlag für eine große Zahl von Funktionen die Riemann-Integrierbarkeit. Insbesondere gelten:

1) Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $p: Q \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, so ist p Riemann-integrierbar.

2) Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $p, q: Q \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen (wobei $q \neq 0$ gelten soll), so ist die rationale Funktion $\frac{p}{q}: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, wenn Q keine Nullstelle von q enthält.

3) Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $Q \subseteq U$ ein Quader, so ist die Einschränkung $f: Q \to \mathbb{R}$ nach Satz 110 stetig und daher Riemann-integrierbar. Insbesondere ist (wegen Satz 111) $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}$ auf U existieren und stetig sind.

17.1.2022

<u>Lemma 134</u> Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f: Q \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \alpha \ \forall \underline{x} \in Q$. Dann ist f Riemann-integrierbar und $\int_Q f(\underline{x})\, d\underline{x} = \alpha \cdot v(Q)$.

<u>Beweis</u>: Ist Z Zerlegung des Quaders Q, die aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$ besteht, so ist $U(f,Z) = \sum_{i=1}^n \alpha \cdot v(Q_i) = \alpha \sum_{i=1}^n v(Q_i) = \alpha \cdot v(Q)$ und daher

$\underline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \sup_Z U(f,Z) = \alpha \cdot v(Q)$. Ebenso ist $O(f,Z) = \sum_{i=1}^n \alpha \cdot v(Q_i) = \alpha \sum_{i=1}^n v(Q_i) = \alpha \cdot v(Q)$

und daher $\overline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} = \inf_Z O(f,Z) = \alpha \cdot v(Q)$. Die Behauptung folgt aus Satz 131.

Satz 135 (Linearität des Riemann-Integrals)

Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader, $f,g: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und $c \in \mathbb{R}$.

(i) Sind f und g beide Riemann-integrierbar, so ist auch $f+g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x}$,

(ii) Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch $c \cdot f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt $\int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} = c \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Beweis: (i) Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 132 gibt es Zerlegungen Z_1 und Z_2 von Q, derart dass $O(f,Z_1) - U(f,Z_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z_2) - U(g,Z_2) < \frac{\varepsilon}{2}$. Es sei Z eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, die aus den Quadern $Q_1,\dots,Q_n$ besteht. Wegen Korollar 129 (ii) gelten dann auch $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $O(g,Z) - U(g,Z) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Aus $f(\underline{x}) + g(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{y} \in Q_i} f(\underline{y}) + \sup_{\underline{y} \in Q_i} g(\underline{y}) \quad \forall \underline{x} \in Q_i \; \forall i \in \{1,\dots,n\}$ folgt

$\sup_{\underline{x} \in Q_i} (f+g)(\underline{x}) \leq \sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) + \sup_{\underline{x} \in Q_i} g(\underline{x}) \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$ und daher

$$O(f+g,Z) = \sum_{i=1}^n v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} (f+g)(\underline{x}) \leq \sum_{i=1}^n v(Q_i) \cdot \left(\sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) + \sup_{\underline{x} \in Q_i} g(\underline{x}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^n v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} g(\underline{x}) = O(f,Z) + O(g,Z).$$

Analog zeigt man $U(f+g,Z) \geq U(f,Z) + U(g,Z)$. Daraus folgt

$O(f+g,Z) - U(f+g,Z) \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

und $f+g$ ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f,Z) + O(g,Z)$$

und

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq U(f+g,Z) \leq \int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(f+g,Z) \leq O(f,Z) + O(g,Z)$$

folgt

$$\left| \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x} \right| \leq O(f,Z) - U(f,Z) + O(g,Z) - U(g,Z) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\int_Q (f+g)(\underline{x})\,d\underline{x} = \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} + \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x}$.

(ii) Ist $c = 0$, so ist $\int_Q \underbrace{(cf)(\underline{x})}_{=0}\,d\underline{x} \overset{\text{Lemma 134}}{=} 0 = c \cdot \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Es sei nun $c > 0$. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, derart dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{c}$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$, so ist

$$O(cf, Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} (cf)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \left(c \sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right)$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) = c \cdot O(f, Z).$$

Analog zeigt man $U(cf, Z) = c\,U(f,Z)$. Daraus folgt

$$O(cf,Z) - U(cf,Z) = c \cdot O(f,Z) - c \cdot U(f,Z) = c\left(O(f,Z) - U(f,Z)\right) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

und cf ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$c \cdot U(f,Z) \le c \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \le c \cdot O(f,Z)$$

und

$$c \cdot U(f,Z) = U(cf,Z) \le \int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} \le O(cf,Z) = c\,O(f,Z)$$

folgt

$$\left| c \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} \right| \le c\,O(f,Z) - c\,U(f,Z) = c\left(O(f,Z) - U(f,Z)\right) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\int_Q (cf)(\underline{x})\,d\underline{x} = c \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Es sei $c = -1$. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, derart dass $O(f,Z) - U(f,Z) < \varepsilon$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$, so ist

$$O(-f, Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \sup_{\underline{x} \in Q_i} (-f)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \left(- \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \right)$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) = - U(f, Z).$$

Analog zeigt man $U(-f,Z) = -O(f,Z)$. Daraus folgt

$$O(-f,Z) - U(-f,Z) = -U(f,Z) + O(f,Z) < \varepsilon$$

und $-f$ ist Riemann-integrierbar nach Satz 132. Aus

$$-O(f,Z) \leq -\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq -U(f,Z)$$

und

$$-O(f,Z) = U(-f,Z) \leq \int_Q (-f)(\underline{x})\,d\underline{x} \leq O(-f,Z) = -U(f,Z)$$

folgt $$\left| -\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q (-f)(\underline{x})\,d\underline{x} \right| \leq -U(f,Z) + O(f,Z) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\int_Q (-f)(\underline{x})\,d\underline{x} = -\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}$.

Es sei schließlich $c < 0$ beliebig. Da $cf = (-1)\big(|c|f\big)$, folgt aus den bereits bewiesenen Fällen, dass cf Riemann-integrierbar ist und dass

$$\int_Q (cf)(x)\,dx = \int_Q (-|c|f)(\underline{x})\,d\underline{x} = -\int_Q (|c|f)(\underline{x})\,dx = -|c|\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = c\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x}.$$

<u>Definition (Erinnerung)</u>: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn $\exists L > 0 \ \forall x, y \in D : |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y|$.

<u>Satz 136</u> Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f, g : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

(i) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$, $\phi : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig und $f(Q) \subseteq D$, so ist auch $\phi \circ f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar,

(ii) Die Funktion $|f| : Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto |f(\underline{x})|$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar,

(iii) Wenn $\exists \delta > 0 \ \forall \underline{x} \in Q : |f(\underline{x})| \geq \delta$, so ist auch $1/f : Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \frac{1}{f(x)}$ Riemann-integrierbar,

(iv) Die Funktion $f \cdot g : Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})$ ist ebenfalls Riemann-integrierbar,

(v) Die Funktionen $\max\{f,g\} : Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \max\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}$ und $\min\{f,g\} : Q \to \mathbb{R}$, $\underline{x} \mapsto \min\{f(\underline{x}), g(\underline{x})\}$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar,

(vi) Die Funktionen $f^+ := \max\{f, 0\} : Q \to \mathbb{R}$ und $f^- := \max\{-f, 0\} : Q \to \mathbb{R}$ sind ebenfalls Riemann-integrierbar.

<u>Beweis</u>: (i) Nach Voraussetzung $\exists L > 0$, derart dass $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x-y| \ \forall x, y \in D$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 132 gibt es eine Zerlegung Z von Q, derart dass

$O(f,Z) - U(f,Z) < \frac{\varepsilon}{L}$. Besteht Z aus den Quadern $Q_1, \dots, Q_n$, so ist

$$|\phi(f(\underline{x})) - \phi(f(\underline{y}))| \leq L\,|f(\underline{x}) - f(\underline{y})| \leq L\left(\sup_{\underline{z}\in Q_i} f(\underline{z}) - \inf_{\underline{z}\in Q_i} f(\underline{z})\right) \quad \forall \underline{x},\underline{y}\in Q_i \;\; \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

und daher

$$\sup_{\underline{x}\in Q_i} (\phi\circ f)(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} (\phi\circ f)(\underline{x}) \leq L\left(\sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\right) \quad \forall i\in\{1,\dots,n\}$$

und somit

$$O(\phi\circ f, Z) - U(\phi\circ f, Z) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{\underline{x}\in Q_i} (\phi\circ f)(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} (\phi\circ f)(\underline{x})\right)\cdot v(Q_i)$$

$$\leq L\sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x}) - \inf_{\underline{x}\in Q_i} f(\underline{x})\right)\cdot v(Q_i) = L\left(O(f,Z) - U(f,Z)\right) < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Nach Satz 132 ist $\phi\circ f$ Riemann-integrierbar.

(ii) Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig (mit $L=1$), da $||x|-|y|| \leq |x-y| \;\; \forall x,y\in\mathbb{R}$. Die Behauptung folgt aus (i).

(iii) Es sei $D = \{x\in\mathbb{R} \mid |x|\geq\delta\}$. Die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{1}{x}$ ist Lipschitz-stetig (mit $L=\frac{1}{\delta^2}$), da $\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{|x||y|} \leq \frac{1}{\delta^2}|x-y| \;\; \forall x,y\in D$.

Die Behauptung folgt aus (i)

(iv) Wir zeigen zunächst, dass aus der Riemann-Integrierbarkeit von $f: Q\to\mathbb{R}$ die Riemann-Integrierbarkeit von $f^2: Q\to\mathbb{R}$, $x\mapsto (f(\underline{x}))^2$ folgt.
Ist $D\subseteq\mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists c>0 \; \forall x\in D: |x|\leq c$), so ist die Funktion $D\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ Lipschitz-stetig (mit $L=2c$), da

$$|x^2-y^2| = |x+y|\cdot|x-y| \leq (|x|+|y|)\cdot|x-y| \leq 2c\cdot|x-y| \quad \forall x,y\in D.$$

Da $f: Q\to\mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, ist f beschränkt. D.h. dass die Menge $D := f(Q)\;(\subseteq\mathbb{R})$ beschränkt ist. Die Riemann-Integrierbarkeit von f^2 folgt aus (i). Die Riemann-Integrierbarkeit von $f\cdot g: Q\to\mathbb{R}$ folgt aus dem soeben gezeigten Spezialfall $f=g$, Satz 135 und der Gleichung

$$f\cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right).$$

(v) Die Behauptung folgt aus (ii), Satz 135 und den Gleichungen

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right) \quad \text{und} \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right).$$

(vi) Die Behauptung folgt aus Lemma 134, Satz 135 und (v)

Satz 137 (Monotonie des Riemann-Integrals)

Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f, g: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

(i) Ist $f \geq 0$, so ist $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \geq 0$,

(ii) Ist $f \geq g$, so ist $\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \geq \int_Q g(\underline{x})\,dx$.

Beweis: (i) Es sei Z eine Zerlegung von Q, die aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_n$ besteht. Dann ist $\inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$ und daher

$$\int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} = \underline{\int_Q} f(\underline{x})\,d\underline{x} \geq U(f, Z) = \sum_{i=1}^{n} v(Q_i) \cdot \inf_{\underline{x} \in Q_i} f(\underline{x}) \geq 0.$$

(ii) Aus $f \geq g$ folgt $f - g \geq 0$ und daher wegen (i)

$$0 \leq \int_Q (f-g)(\underline{x})\,d\underline{x} \overset{\text{Satz 135}}{=} \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} - \int_Q g(\underline{x})\,d\underline{x},$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 138 (Dreiecksungleichung für Riemann-Integrale)

Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^k$ ein Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \right| \leq \int_Q |f(\underline{x})|\,d\underline{x}.$$

Beweis: Nach Satz 136 (ii) ist $|f|: Q \to \mathbb{R}$ ebenfalls Riemann-integrierbar. Wendet man Satz 137 (ii) auf die Ungleichungskette $-|f| \leq f \leq |f|$ an, so erhält man

$$-\int_Q |f(\underline{x})|\,d\underline{x} \leq \int_Q f(\underline{x})\,d\underline{x} \leq \int_Q |f(\underline{x})|\,d\underline{x},$$

woraus die Behauptung folgt.

Ende Prüfungsstoff Prüfungstermin 29.1.2022