NAME: **MATRIKELNR.:**

Kolloquium Analysis 2, 20. Februar 2009

1a) Definieren Sie die Begriffe *Riemann – Integral* und *Stammfunktion* einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Achten Sie darauf, alle vorkommenden Begriffe exakt zu definieren.

1b) Formulieren und beweisen Sie den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung.

1c) Leiten Sie die Stammfunktion $\int \log x \, dx$ her.

2a) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. Definieren Sie, wann f *konvex, konkav, streng konvex* bzw. *streng konkav* genannt wird.

2b) Formulieren und beweisen Sie die Dreiecksungleichung für Riemann – Integrale.

2c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_0^1 t^{-\alpha} \, dx$ und welchen Wert hat es in diesem Fall?

3a) Definieren Sie die Begriffe *Reihe, konvergente Reihe* und *absolut konvergente Reihe.*

3b) Formulieren und beweisen Sie das Konvergenzkriterium von Leibniz (ohne Fehlerabschätzung).

3c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Verdichtungssatzes, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergiert bzw. divergiert.

4a) Definieren Sie den Begriff *Konvergenzradius einer Potenzreihe.*

4b) Beweisen Sie: Wenn die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ Konvergenzradius $R \in (0, +\infty)$ besitzt, so ist sie für $|x - a| < R$ absolut konvergent und für $|x - a| > R$ divergent.

4c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} x^k.$$