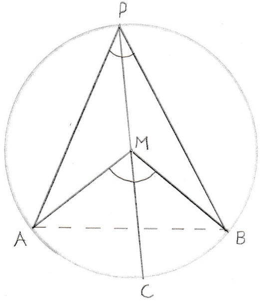
4.17 Buch III der Elemente

Buch III behandelt Kreise und ihre Eigenschaften. Einige bekannte darin enthaltenen Resultate sind:

- Buch III, 10 Zwei Kreise haben höchsten zwei Schnittpunkte.
- Buch III, 13 Zwei Kreise berühren einander in höchstens einem Punkt (sowohl bei Berührung innen als auch bei Berührung außen).
- Buch III, 17 Von einem Punkt (der außerhalb eines Kreises liegt) aus eine Tangente an den Kreis legen. (Die angegebene Konstruktion verwendet keinen Thaleskreis, da der Satz von Thales erst später besprochen wird.)
- Buch III, 20 Zentriwinkelsatz
- Buch III, 21 Peripheriewinkelsatz
- Buch III, 31 Satz von Thales
- Buch III, 35 Sehnensatz
- Buch III, 36 Sekanten-Tangenten-Satz

Euklids Beweis des Zentriwinkelsatzes (Buch III, 20) beginnt mit dem unten gezeichneten Fall. Zu zeigen ist $\angle AMB = 2 \cdot \angle APB$.

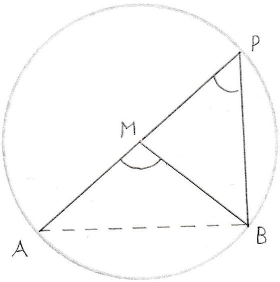


Da $\overline{AM} = \overline{MP}$ ist das Dreieck AMP gleichschenkelig und daher $\angle MAP = \angle APM$. Es folgt $\angle AMP = 180^\circ - 2 \cdot \angle APM$ und daher $\angle AMC = 2 \cdot \angle APM$. Analog gilt $\angle BMC = 2 \cdot \angle BPM$ und daher

$$\angle AMB = \angle AMC + \angle BMC = 2 \cdot \angle APM + 2 \cdot \angle BPM$$

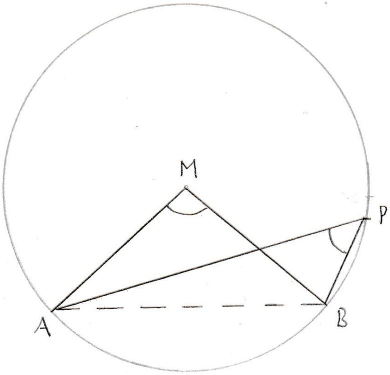
$$= 2 \cdot (\angle APM + \angle BPM) = 2 \cdot \angle APB.$$

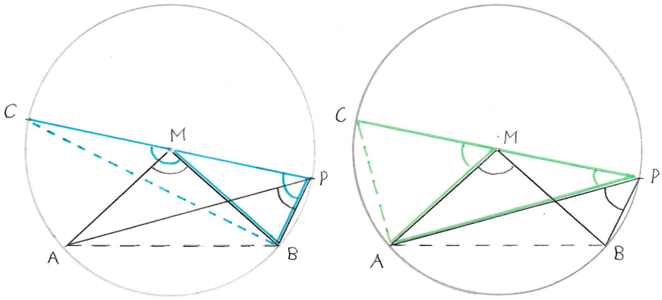
Wir behandeln als nächstes den Spezialfall, dass A, M und P auf einer Gerade liegen. (Euklid behandelt diesen Fall nur implizit und schreibt, dass man ihn analog zeigen kann.)



Es ist wieder $\overline{MP} = \overline{MB}$, das Dreieck MBP gleichschenkelig und daher $\angle PBM = \angle BPM = \angle APB$. Es folgt
$\angle BMP = 180^\circ - 2 \cdot \angle APB$ und $\angle AMB = 2 \cdot \angle APB$.

Zuletzt führt Euklid den unten gezeichneten Fall auf den eben besprochenen Spezialfall zurück.





Nach diesem Spezialfall gelten

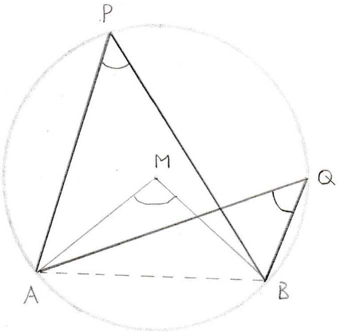
$$\angle CMB = 2 \cdot \angle CPB \text{ und } \angle CMA = 2 \cdot \angle CPA$$

und daher

$$\angle AMB = \angle CMB - \angle CMA = 2 \cdot \angle CPB - 2 \cdot \angle CPA$$

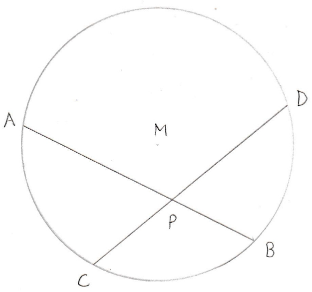
$$= 2 \cdot (\angle CPB - \angle CPA) = 2 \cdot \angle APB.$$

Der Peripheriewinkelsatz (Buch III, 21) lässt nun schnell aus dem Zentriwinkelsatz ableiten. Zu zeigen ist $\angle APB = \angle AQB$.



Nach dem Zentriwinkelsatz ist $2 \cdot \angle APB = \angle AMB = 2 \cdot \angle AQB$ und daher $\angle APB = \angle AQB$.

Beim Sehnensatz (Buch III, 35) ist in der unten gezeigten Situation zu beweisen, dass $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.



Genauer beweist Euklid folgendes (ohne es auszusprechen): Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r und einer Sehne, die die Punkte A und B auf der Kreislinie verbindet. Liegt ein Punkt P auf der Sehne (d.h. zwischen A und B), so gilt

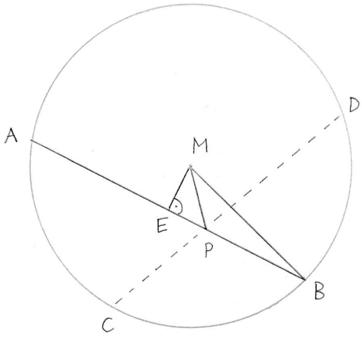
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - \overline{PM}^2.$$

Beim Beweis behandelt Euklid zunächst den Fall, dass beide Sehnen durch den Mittelpunkt gehen, d.h. dass $M = P$. In diesem Fall gilt $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD}$ und die Behauptung ist trivial erfüllt.

(Da dann $\overline{PA} = \overline{PB} = r$ und $\overline{PM} = 0$ ist auch die Gleichung $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - \overline{PM}^2$ erfüllt.)

Danach behandelt er den allgemeinen Fall (bei dem die beiden Sehnen AB und CD nicht durch den Mittelpunkt M gehen).

Bezeichnet E den Mittelpunkt der Sehne $\overline{AB}$, so gilt $\overline{AE} = \overline{BE}$ und die Sehne und die Strecke ME stehen im rechten Winkel aufeinander.



Aus Buch II, 5 folgt

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PE}^2 = \overline{BE}^2$$

Addiert man auf beiden Seiten $\overline{ME}^2$, so erhält man daraus

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PE}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ME}^2.$$

Wegen

$$\overline{PE}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{PM}^2 \text{ und } \overline{BE}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{MB}^2 (= r^2)$$

erhält man

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PM}^2 = \overline{MB}^2 (= r^2)$$

(womit die Formulierung $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = r^2 - \overline{PM}^2$ bewiesen ist).

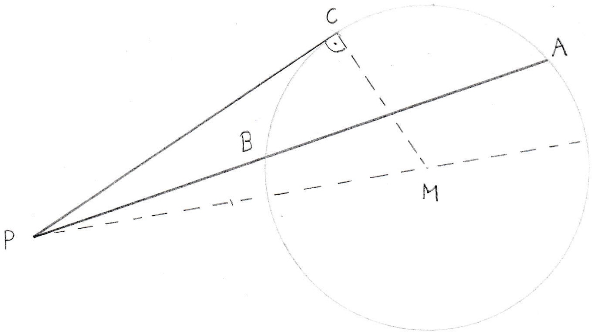
Euklid argumentiert weiter, dass man völlig analog

$$\overline{PC} \cdot \overline{PD} + \overline{PM}^2 = \overline{MC}^2$$

zeigen kann. Da $\overline{MB} = \overline{MC}$ folgt daraus nun auch

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

Beim Sekanten-Tangenten-Satz (Buch III, 36) ist in der unten gezeigten Situation zu beweisen, dass $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$.

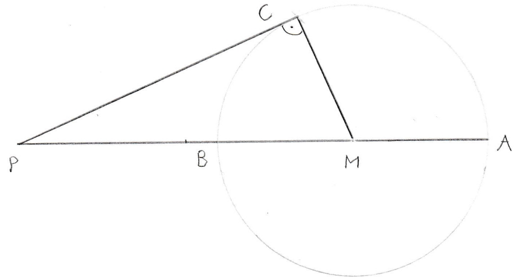


Da $\overline{PC}^2 + r^2 = \overline{PM}^2$ wird damit

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2 - r^2$$

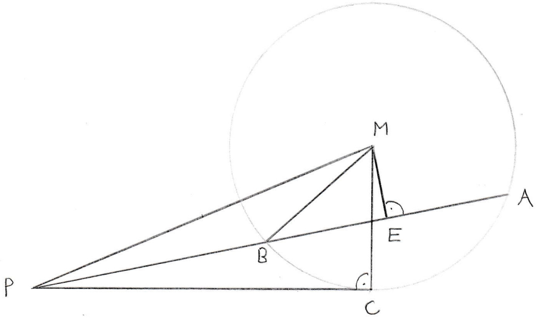
bewiesen (wobei r wieder den Kreisradius bezeichnet).

Euklids Beweis beginnt mit dem Spezialfall, dass der Kreismittelpunkt auf der Sehne liegt:



Klarerweise gilt $\overline{MB} = \overline{AM}$. Nach Buch II, 6 ist $\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MB}^2 = \overline{PM}^2$ (womit $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2 - r^2$ bewiesen ist). Da $\overline{MC} = \overline{MB}$ folgt $\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MC}^2 = \overline{PM}^2$. Aus dem Satz des Pythagoras folgt $\overline{PM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{PC}^2$. Setzt man das ein, so erhält man $\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MC}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{PC}^2$ und daher $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$.

Danach behandelt Euklid den Fall, dass der Kreismittelpunkt nicht auf der Sehne liegt:



Auch hier ist $\overline{EB} = \overline{AE}$ und nach Buch II, 6 gilt wieder $\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{EB}^2 = \overline{EP}^2$, und daher

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{EB}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{EP}^2 + \overline{ME}^2.$$

Nach dem Satz des Pythagoras gelten

$$\overline{EB}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{MB}^2 \quad \text{und} \quad \overline{EP}^2 + \overline{ME}^2 = \overline{PM}^2.$$

Einsetzen gibt

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MB}^2 = \overline{PM}^2$$

(womit wieder $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM}^2 - r^2$ bewiesen ist).
Da $\overline{MB} = \overline{MC}$ kann man das umschreiben zu

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MC}^2 = \overline{PM}^2.$$

Wieder nach dem Satz des Pythagoras gilt $\overline{PM}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{PC}^2$.
Setzt man das ein, erhält man

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{MC}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{PC}^2.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2.$$

Man kann den Sehnensatz und den Sekanten-Tangenten-Satz folgendermaßen zusammenfassen: Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r, ein Punkt P (der nicht auf der Kreislinie liegt) und eine Gerade durch P, die den Kreis in den Punkten A und B schneidet. Dann gilt

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = |\overline{PM}^2 - r^2|.$$

Liegt dabei der Punkt P außerhalb des Kreises und ist die Gerade eine Tangente an den Kreis, die ihn im Punkt A berührt, so handelt es sich bei $A = B$ um einen Schnittpunkt der Vielfachheit 2 und diese Gleichung wird zu

$$\overline{PA}^2 = \overline{PM}^2 - r^2$$

(was sofort aus dem Satz des Pythagoras folgt).