4.19 Buch V der Elemente

In Buch V wird die ebene Geometrie für einen wesentlich abstrakteren Abschnitt unterbrochen. Es enhält eine Theorie der Proportionen, die sowohl kommensurable als auch inkommensurable Größen umfasst und von Eudoxos stammt.

Diese Theorie wird an dieser Stelle eingefügt, damit sie im nachfolgenden Buch VI verwendet werden kann (da man z.B. den Strahlensatz ohne einen allgemeinen Proportionenbegriff kaum exakt formulieren kann).

Was genau eine Größe ist, wird nicht definiert. Die Theorie ist aber auf Streckenlängen, Flächeninhalte, Volumina und Zahlen anwendbar. (Auf Winkel ist sie mit der Einschränkung anwendbar, dass vier rechte Winkel einen Winkel von 0° bilden.)

Das Buch beginnt mit einer Reihe von Definitionen, von denen wir in der zweiten Hälfte einige schon als Aussagen bzw. Programm für die nachfolgenden Sätze empfinden. Die ersten Definitionen lauten:

1. *Teil eine Größe ist eine Größe, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau misst;*

2. *Und Vielfaches die größere von der kleineren, wenn sie von der kleineren genau gemessen wird.*

Das würden wir wohl so formulieren: Sind α, β zwei Größen (wobei $\beta > \alpha$), so sei

$$\alpha \text{ ist Teil von } \beta \quad \Leftrightarrow \quad \beta \text{ ist Vielfaches von } \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \beta = n\alpha$$

3. *Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.*

Da wir alle auftretenden Größen als reelle Zahlen auffassen würden, würden wir wohl

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$$

schreiben. In der Definition wird darauf hingewiesen, dass es nur Sinn hat, gleichartige Größen miteinander zu vergleichen.

4. *Dass sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.*

Das besagt: Sind α, β Größen, die in einem Verhältnis zueinander stehen, so muss gelten, dass $\exists\, n \in \mathbb{N} : n\alpha > \beta$. Das ist eine Version des archimedischen Axioms. Dadurch werden unendlich kleine und unendlich große Größen ausgeschlossen.

5. *Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind;*

6. *Und die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen;*

Bezeichnet man die vier Grössen mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so besagt das

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Leftrightarrow \quad \forall n, m \in \mathbb{N} : n\alpha > m\beta \;\Leftrightarrow\; n\gamma > m\delta,$$

$$n\alpha = m\beta \;\Leftrightarrow\; n\gamma = m\delta$$

$$\text{und} \quad n\alpha < m\beta \;\Leftrightarrow\; n\gamma < m\delta$$

Diese Beziehungen beginnen bekannter auszusehen, wenn man sie folgendermaßen umformuliert: Für alle $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ gilt

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\gamma}{\delta} > \frac{m}{n}, \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\gamma}{\delta} = \frac{m}{n}$$

$$\text{und} \quad \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\gamma}{\delta} < \frac{m}{n}.$$

Verwendet man für die erste und dritte Beziehung noch mehr moderne Sprache, erhält man

$$\sup\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, \frac{m}{n} < \frac{\alpha}{\beta}\right\} = \sup\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, \frac{m}{n} < \frac{\gamma}{\delta}\right\}$$

und

$$\inf\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, \frac{m}{n} > \frac{\alpha}{\beta}\right\} = \inf\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+ \,\middle|\, \frac{m}{n} > \frac{\gamma}{\delta}\right\}.$$

So aufgeschrieben meint man fast, eine Theorie der Dedekindschen Schnitte für positive reelle Zahlen vor sich zu haben. Ein großer Unterschied ist dabei, dass Euklid nur *Verhältnisse von Größen* betrachtet, die er *nicht* als Zahlen ansieht.

Man beachte auch, dass α und β gleichartige Größen sein müssen (da sie in einem Verhältnis zueinander stehen) und ebenso γ und δ. Es ist aber durchaus möglich, dass α, β einerseits und γ, δ andererseits verschiedenartige Größen sind. Es soll ja möglich sein, Aussagen zu treffen, wie dass sich die Volumina von Dodekaeder und Ikosaeder genauso zueinander verhalten wie ihre Oberflächen.

7. *Wenn aber von den Gleichvielfachen das Vielfache der ersten Größe das Vielfache der zweiten übertrifft, während das Vielfache der dritten das Vielfache der vierten nicht übertrifft, dann sagt man, dass die erste Größe zur zweiten ein größeres Verhältnis hat als die dritte zur vierten.*

Mit den selben Bezeichnungen wie oben besagt das:

$$\begin{aligned} \alpha : \beta > \gamma : \delta \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, n, m \in \mathbb{N} : n\alpha > m\beta \;\text{ aber }\; n\gamma \leq m\delta \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^{+} : \frac{\alpha}{\beta} > \frac{m}{n} \geq \frac{\gamma}{\delta} \end{aligned}$$

In den abschließenden Definitionen werden verschiedene Eigenschaften und Transformationen von Verhältnissen definiert. (Z.B. wird Umkehrung als Ersetzen von $\alpha : \beta$ durch $\beta : \alpha$ definiert.) Wir formulieren gleich die entsprechenden Aussagen, die in Buch V später bewiesen werden.

- Vertauschung:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha : \gamma = \beta : \delta$$

  Für die Anwendung müssen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleichartige Größen sein. Bewiesen in Buch V, 16.

- Umkehrung: $\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Rightarrow \quad \beta : \alpha = \delta : \gamma$
- Verbindung:

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Rightarrow \quad (\alpha + \beta) : \beta = (\gamma + \delta) : \delta$$

  Bewiesen in Buch V, 18.

- Trennung: Ist $\alpha > \beta$, so
$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Rightarrow \quad (\alpha - \beta) : \beta = (\gamma - \delta) : \delta.$$
Bewiesen in Buch V, 17.
- Umwendung: Ist $\alpha > \beta$, so
$$\alpha : \beta = \gamma : \delta \quad \Rightarrow \quad \beta : (\alpha - \beta) = \delta : (\gamma - \delta).$$
D.h. Umwendung ist Trennung gefolgt von Umkehrung.
- Verhältnis über gleiches weg: Ist
$$\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_1 : \beta_2,\ \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_2 : \beta_3, \dots$$
$$\dots, \alpha_{n-1} : \alpha_n = \beta_{n-1} : \beta_n$$
so folgt $\alpha_1 : \alpha_n = \beta_1 : \beta_n$. Bewiesen in Buch V, 22.

- Überkreuztes Verhältnis: Gelten

$$\alpha_1 : \alpha_2 = \beta_2 : \beta_3 \quad \text{und} \quad \alpha_2 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_2$$

  so folgt $\alpha_1 : \alpha_3 = \beta_1 : \beta_3$. Bewiesen in Buch V, 23.

Die ersten sechs Propositionen enthalten Beziehungen von Vielfachen von Größen, in denen wir versucht sind, eine algebraische Struktur zu sehen:

- Buch V, 1 Für $n \in \mathbb{N}$ und Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ gilt

$$n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) = n\alpha_1 + \cdots + n\alpha_k.$$

- Buch V, 2 Für $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und eine Größe α gilt

$$(n_1 + \cdots + n_k)\alpha = n_1\alpha + \cdots + n_k\alpha.$$

- Buch V, 3 Für $m, n \in \mathbb{N}$ und eine Größe α gilt
$$m(n\alpha) = (mn)\alpha.$$
- Buch V, 4 Aus $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ folgt
$$m\alpha : n\beta = m\gamma : n\delta.$$
- Buch V, 5 Für $n \in \mathbb{N}$ und Größen $\alpha > \beta$ gilt
$$n\alpha - n\beta = n(\alpha - \beta).$$
- Buch V, 6 Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ und eine Größe α gilt
$$n\alpha - m\alpha = (n - m)\alpha.$$

In den nachfolgenden Propositionen werden die bei den Definitionen beschriebenen Aussagen (und ähnliche) bewiesen. Enthalten sind darin:

- Buch V, 12 Aus $\alpha_1 : \beta_1 = \cdots = \alpha_k : \beta_k$ folgt

$$\alpha_1 : \beta_1 = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) : (\beta_1 + \cdots + \beta_k).$$

- Buch V, 15 Mit Hilfe von V, 12 wird bewiesen: Ist $n \in \mathbb{N}$ und α, β Größen, so gilt

$$\alpha : \beta = (n\alpha) : (n\beta).$$

Buch V endet mit der folgenden Aussage:

- Buch V, 25 Aus $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ mit

  $$\alpha = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

  und

  $$\delta = \min\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

  folgt

  $$\alpha + \delta > \beta + \gamma.$$

  Für $\beta = \gamma$ ist $\alpha\delta = \beta^2$ und man erhält daraus als Spezialfall die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel:

  $$\frac{\alpha + \delta}{2} > \sqrt{\alpha\delta}$$

Dabei wird offenbar vorausgesetzt, dass

$$\alpha > \max\{\beta,\gamma\} \geq \min\{\beta,\gamma\} > \delta.$$

Euklids Beweis verläuft folgendermaßen: Aus

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

folgt

$$\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

wobei Buch V, 19 verwendet wird.

Wir würden modern argumentieren, dass

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \Rightarrow \quad \alpha\delta = \beta\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta - \beta\gamma = \alpha\beta - \alpha\delta$$

$$\Rightarrow \quad (\alpha - \gamma)\beta = (\beta - \delta)\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Daher ist

$$\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} > 1,$$

woraus

$$\alpha - \gamma > \beta - \delta$$

und

$$\alpha + \delta > \beta + \gamma$$

folgen.