4.20 Buch VI der Elemente

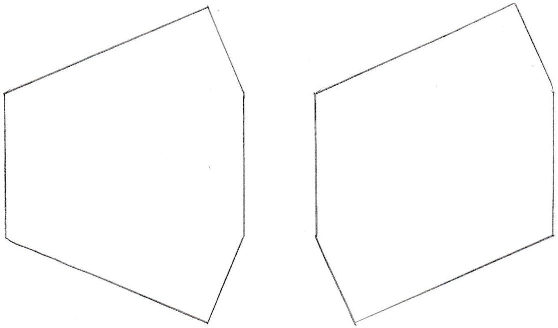
In Buch VI wird die in Buch V entwickelte Theorie auf die ebene Geometrie angewandt. Es beginnt mit den folgenden drei Definitionen:

1. *Ähnlich sind geradlinige Figuren, in denen die Winkel einzeln gleich sind und die gleiche Winkel umfassenden Seiten in Proportion stehen.*

2. *Eine Strecke heißt stetig geteilt, wenn sich, wie die ganze Strecke zum größeren Abschnitt, so der größere Abschnitt zum kleineren verhält.*

3. *Höhe ist in jeder Figur das vom Scheitel auf die Basis gefällte Lot.*

Bei Definition 1 ist offenbar gemeint, dass die Anordnung der Seiten übereinstimmen muss. Wörtlich genommen wären nämlich auch die folgenden beiden Figuren ähnlich (die es aber nicht sind):



Def. 2 ist die Definition des goldenen Schnitts. Hat die ganze Strecke die Länge 1 und der größere Abschnitt die Länge x, so besagt die Definition $1 : x = x : (1 - x)$, woraus folgt, dass $1 - x = x^2$ bzw.

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da $x > 0$ gilt

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Das erste Ergebnis in Buch VI ist:

Buch VI, 1 *Dreiecke sowie Parallelogramme unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundlinien.*

Modern würde man formulieren: Sind a_1 und a_2 je eine Seitenlänge in zwei Dreiecken bzw. Parallelogrammen und h die Länge der Höhe senkrecht darauf (die in beiden Dreiecken bzw. Parallelogrammen übereinstimmt), so gilt, dass sich ihre Flächeninhalte

$$\frac{a_1 \cdot h}{2} : \frac{a_2 \cdot h}{2}$$

bzw.

$$a_1 \cdot h : a_2 \cdot h$$

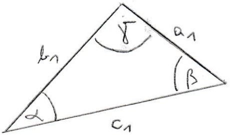
zueinander verhalten wie

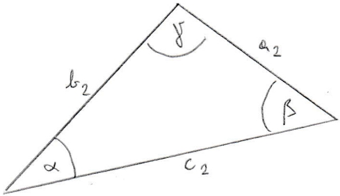
$$a_1 : a_2.$$

Die nachfolgenden Propositionen behandeln ähnliche Dreiecke. Für Eigenschaft zweier Dreiecke ähnlich zu sein werden mehrere Bedingungen angegeben:

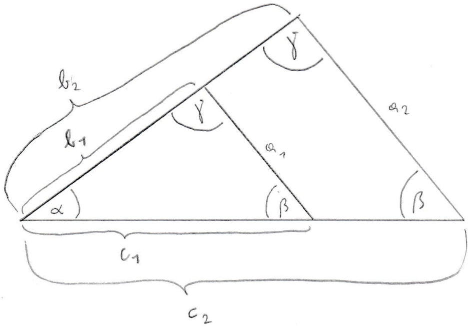
Buch VI, 4 *In winkelgleichen Dreiecken stehen die Seiten um gleiche Winkel in Proportion, und zwar entsprechen einander die, die gleichen Winkeln gegenüberliegen.*

Buch VI, 5 *Stehen in zwei Dreiecken die Seiten in Proportion, so müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.*

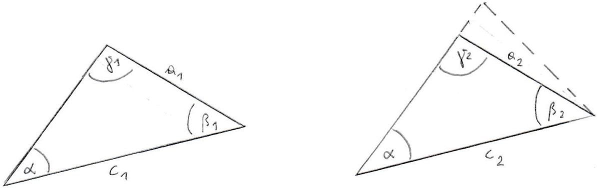




Buch VI, 6 *Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und die Seiten um die gleichen Winkel in Proportion stehen, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, denen entsprechende Seiten gegenüberliegen.*

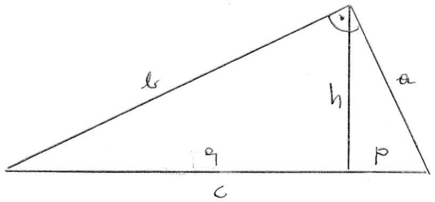


Buch VI, 7 *Wenn in zwei Dreiecken ein Winkel einem Winkel gleich ist und um weitere Winkel die Seiten in Proportion stehen, während die letzten Winkel beide zugleich entweder kleiner oder nicht kleiner als ein Rechter sind, dann müssen die Dreiecke winkelgleich sein, und zwar müssen in ihnen die Winkel gleich sein, um die die Seiten in Proportion stehen.*



D.h. wenn $a_1 : a_2 = c_1 : c_2$ und entweder $\max\{\gamma_1, \gamma_2\} < \frac{\pi}{2}$ oder $\min\{\gamma_1, \gamma_2\} \geq \frac{\pi}{2}$, so sind die beiden Dreiecke winkelgleich.

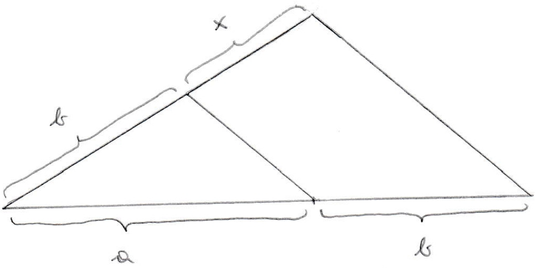
Buch VI, 8 *Fällt man in einem rechtwinkeligen Dreieck das Lot aus dem rechten Winkel auf die Grundlinie, so sind die Dreiecke am Lot sowohl dem ganzen als auch einander ähnlich.*



Ist h die Länge der Höhe senkrecht auf die Hypothenuse und zerteilt die Höhe die Hypothenuse in zwei Teile der Länge q und p, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke die Beziehung $q : h = h : p$. Schreibt man das um zu $h^2 = p \cdot q$, so erhält man den Höhensatz.

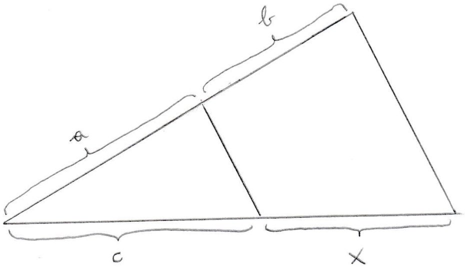
Buch VI, 11 *Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionale zu finden.*

Sind a und b die Längen der beiden gegebenen Strecken, so wird mit Hilfe des Strahlensatzes eine Strecke der Länge x mit der Eigenschaft $a : b = b : x$ konstruiert.



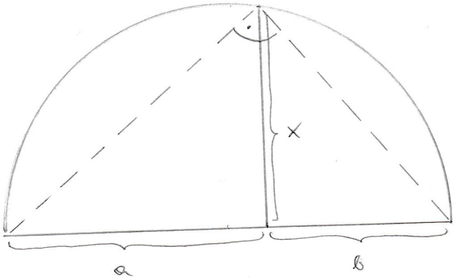
Buch VI, 12 *Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.*

Sind a, b und c die Längen der drei gegebenen Strecken, so wird mit Hilfe des Strahlensatzes eine Strecke der Länge x mit der Eigenschaft $a : b = c : x$ konstruiert.



Buch VI, 13 *Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden.*

Sind a und b die Längen der beiden gegebenen Strecken, so wird mit Hilfe des Höhensatzes eine Strecke der Länge x mit der Eigenschaft $a : x = x : b$ konstruiert.



Buch VI, 19 *Ähnliche Dreiecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten.*

Damit ist gemeint: Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Seitenlängen.

Buch VI, 20 *Ähnliche Vielecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen, und zwar in gleichviele und den Ganzen (proportional) entsprechende; und die Vielecke stehen zueinander zweimal im Verhältnis wie entsprechende Seiten zueinander.*

Die vorangegangene Proposition wird auf Vielecke verallgemeinert, d.h. auch die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich zueinander wie die Quadrate ihrer Seitenlängen.

In Buch VI findet man auch viele Sätze über Parallelogramme, auf die wir nicht eingehen. Gegen Ende von Buch VI werden in den Propositionen 28 und 29 allgemeine Versionen elliptischer und hyperbolischer Flächenanlegungen behandelt (die man modern als Lösung quadratischer Gleichungen interpretieren kann).

Weiters enthält Buch VI die folgende Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras. (Wählt man als geradlinige Figur ein Quadrat, so erhält man als Spezialfall den Satz des Pythagoras.)

Buch VI, 31 *Im rechtwinkeligen Dreieck ist eine (geradlinige) Figur über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ähnlichen, über den den rechten Winkel umfassenden Seiten ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich.*