4.22 Buch XI der Elemente

In Buch XI werden die Grundbegriffe der räumlichen Geometrie eingeführt und für viele Propositionen aus den Büchern I und VI die entsprechende dreidimensionale Aussagen bewiesen. Es beginnt mit der Definition einer Reihe von Begriffen:

1. *Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.*

2. *Eine Begrenzung eines Körpers ist eine Fläche.*

Im weiteren wird unter anderem definiert:

- Der Neigungswinkel einer Gerade zu einer Ebene und wann eine Gerade senkrecht auf einer Ebene steht.
- Der Neigungswinkel zweier Ebenen zueinander und wann sie senkrecht aufeinander stehen.
- Wann zwei Ebenen parallel sind.

Euklid definiert folgendermaßen, wann zwei Körper gleich bzw. ähnlich sind:

9. *Ähnlich sind Körper, die von ähnlichen ebenen Flächen in gleicher Anzahl umfasst werden.*

10. *Gleich und ähnlich sind Körper, die von ähnlichen ebenen Flächen in gleicher Zahl und Größe umfasst werden.*

Diese Definitionen sind nur sinnvoll, wenn man die zusätzliche Annahme macht, dass es sich um konvexe Körper handelt. (Ansonsten wäre ein Ikosaeder z.B. zu einem gleich großen Ikosaeder mit einer einspringenden Ecke gleich.)

Ebenso muss die Anordnung der Flächen zueinander übereinstimmen. (Einen analogen Einwand konnte man auch schon bei Buch VI, Def. 1 machen.)

Weiters werden die folgenden Körper definiert:

- Die Begriffe Pyramide und Prisma. Diese Definition ist allgemein gehalten, oft meint Euklid im folgenden aber eine dreiseitige Pyramide oder einen Tetraeder.
- Die Begriffe Kugel, Kegel und Zylinder werden interessanterweise als Rotationsflächen definiert, die entstehen, wenn ein Halbkreis um den Durchmesser, ein rechtwinkeliges Dreieck um eine Kathete bzw. ein Rechteck um eine Seite rotieren.
- Die Platonischen Körper Würfel, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder. Diese Definitionen fehlen in arabischen Übersetzungen und sind möglicherweise erst nach Euklid hinzugefügt worden.

Eine großer Teil von Buch XI beschäftigt sich mit Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen im Raum.

Etliche weitere Propositionen beschäftigen sich mit Parallelepipeden, und zwar unter anderem mit ihrem Volumen:

Buch XI, 31 *Parallelflache auf gleichen Grundflächen und unter derselben Höhe sind einander gleich.*

D.h. haben zwei Parallelepipede dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe, so haben sie dasselbe Volumen.

Buch XI, 32 *Parallelflache unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.*

D.h. haben zwei Parallelepipede Volumen V_1 und V_2 bzw. Grundflächen G_1 und G_2, sowie dieselbe Höhe h, so ist $V_1/V_2 = G_1/G_2$ (was aus $V_1 = G_1 \cdot h$ und $V_2 = G_2 \cdot h$ folgt).

Buch XI, 33 *Ähnliche Parallelflache stehen zueinander dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten.*

Es seien a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 die drei Kanten der Parallelepipede mit Volumen V_1 bzw. V_2. Nach der Definition der Ähnlichkeit gilt $a_2 : a_1 = b_2 : b_1 = c_2 : c_1$, d.h. es gibt ein $q > 0$, derart dass

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = q.$$

Die Behauptung ist, dass $V_2 = q^3 \cdot V_1$. Fasst man die Kanten a_1, b_1, c_1 und a_2, b_2, c_2 als (jeweils linear unabhängige) Vektoren auf, so folgt das z.B. aus

$$V_2 = |\det(a_2, b_2, c_2)| = |\det(qa_1, qb_1, qc_1)|$$

$$= q^3 |\det(a_1, b_1, c_1)| = q^3 V_1.$$

Buch XI, 34 *In gleichen Parallelflachen sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Parallelflache, in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.*

D.h. haben zwei Parallelepipede Grundflächen G_1 und G_2, Höhen h_1 und h_2 und dasselbe Volumen V, so gilt $G_1/G_2 = h_2/h_1$ (was aus $G_1 h_1 = V = G_2 h_2$ folgt).

Weiters gilt die Umkehrung: Haben zwei Parallelepipede Grundflächen G_1 und G_2, Höhen h_1 und h_2 und erfüllen die Relation $G_1/G_2 = h_2/h_1$, so haben sie dasselbe Volumen (was aus $V_2 = G_2 h_2 = G_1 h_1 = V_1$ folgt).

4.23 Buch XII der Elemente

Buch XII behandelt den Flächeninhalt des Kreises und das Volumen von Pyramiden, Kegeln, Zylindern und Kugeln. Wichtiges Hilfsmittel ist dabei die erste Proposition von Buch X, die Grundlage des Exhaustionsverfahrens ist:

Buch X,1 *Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.*

Euklids Beweis verläuft (modern formuliert) folgendermaßen:

Es sei $0 < \alpha < \beta$. Nach Buch V, Def. 4 $\exists n \in \mathbb{N} : n\alpha > \beta$.

Die Behauptung lautet nun: Sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} > 0$, so ist

$$\frac{\beta}{\prod_{i=1}^{n-1}(2+\varepsilon_i)} < \alpha.$$

Dabei steht Euklid das für uns natürliche Argument, dass es sich bei

$$\left(\frac{\beta}{\prod_{i=1}^{n-1}(2+\varepsilon_i)}\right)_{n\geq 1}$$

um eine streng monoton fallende Nullfolge handelt, nicht zur Verfügung.

Er argumentiert vielmehr folgendermaßen: Es ist

$$
\begin{aligned}
(n-1)\alpha &= \frac{n-1}{n} \cdot n\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot n\alpha \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot n\alpha = \frac{1}{2} \cdot n\alpha > \frac{1}{2+\varepsilon_1} \cdot \beta.
\end{aligned}
$$

Verfahre weiter so: Ist (für $k < n$ und daher $n - k \geq 1$) schon gezeigt, dass

$$
(n-k+1)\alpha > \frac{\beta}{\prod_{i=1}^{k-1}(2+\varepsilon_i)},
$$

so ist

$$
\begin{aligned}
(n-k)\alpha &= \frac{n-k}{n-k+1}\cdot(n-k+1)\alpha \\
&= \left(1-\frac{1}{n-k+1}\right)\cdot(n-k+1)\alpha \\
&\geq \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot(n-k+1)\alpha = \frac{1}{2}\cdot(n-k+1)\alpha \\
&> \frac{1}{2+\varepsilon_k}\cdot\frac{\beta}{\prod_{i=1}^{k-1}(2+\varepsilon_i)} = \frac{\beta}{\prod_{i=1}^{k}(2+\varepsilon_i)}.
\end{aligned}
$$

Für $k = n-1$ erhält man die Behauptung.

Als erste Proposition wird in Buch XII (unter Verwendung von Buch VI, 20) die folgende Aussage bewiesen, die die Flächeninhalte von Polygonen betrifft, die in Kreisen eingeschrieben sind:

Buch XII, 1 *Ähnliche Vielecke in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.*

Anwendung von Buch X, 1 führt dann auf:

Buch XII, 2 *Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.*

Das würden wir folgendermaßen schreiben: Haben zwei Kreise Radien r_1 und r_2, so erfüllen ihre Flächeninhalte $r_1^2\pi$ und $r_2^2\pi$ die Gleichung

$$\frac{r_1^2\pi}{r_2^2\pi} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2}.$$

Gegeben seien die beiden Kreise K und L mit Durchmessern d und ℓ. Zu zeigen ist

$$\frac{F(L)}{F(K)} = \frac{\ell^2}{d^2} \quad \text{bzw.} \quad F(K) = F(L)\frac{d^2}{\ell^2}.$$

Falls nicht, muss

$$\frac{F(L)}{F(K)} < \frac{\ell^2}{d^2} \quad \text{oder} \quad \frac{F(L)}{F(K)} > \frac{\ell^2}{d^2}$$

bzw.

$$F(L)\frac{d^2}{\ell^2} < F(K) \quad \text{oder} \quad F(L)\frac{d^2}{\ell^2} > F(K)$$

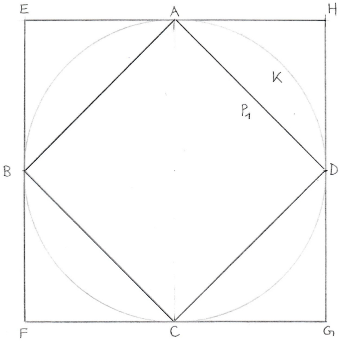
gelten. Angenommen,

$$\mu := F(L)\frac{d^2}{\ell^2} < F(K).$$

Dann gilt

$$\frac{\ell^2}{d^2} = \frac{F(L)}{\mu}.$$

Nun schreibt Euklid dem Kreis K eine Folge $(P_n)_{n\geq 1}$ von 2^{n+1}-ecken ein. Für $n = 1$ sei P_1 das Quadrat $ABCD$:



Dabei gilt

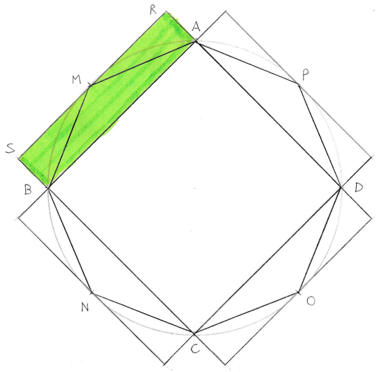
$$F(P_1) > \frac{1}{2}F(K),$$

da $F(P_1)$ die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats $EFGH$ ist, dessen Fläche größer als $F(K)$ ist. Das kann man umschreiben zu

$$F(K) - F(P_1) < \frac{1}{2}F(K),$$

d.h. nimmt man P_1 von K weg, so hat man mehr als die Hälfte der Kreisfläche entfernt.

Im nächsten Schritt wird das Quadrat P_1 zu einem regelmäßigen Achteck P_2 erweitert. Dabei werden dem Quadrat $ABCD$ die vier Dreiecke ABM, BCN, CDO und DAP hinzugefügt.



Dabei gilt

$$F(P_2) - F(P_1) > \frac{1}{2}\big(F(K) - F(P_1)\big).$$

Im (grün markierten) Rechteck $ABRS$ bedeutet diese Ungleichung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABM mehr als die Hälfte des Kreissegments zwischen A und B ist.

Das ist korrekt, da das Dreieck ABM den halben Flächeninhalt des Rechtecks $ABRS$ besitzt, das größeren Flächeninhalt als das Kreissegment zwischen A und B besitzt.

Geht man von der Menge $K \setminus P_1$ zur Menge $K \setminus P_2$ über, so hat man mehr als die Hälfte der von K nach Entfernen von P_1 verbliebenen Fläche entfernt. Man kann das auch ausdrücken, indem man die letzte Ungleichung umformt zu

$$F(K) - F(P_2) < \frac{1}{2}\big(F(K) - F(P_1)\big).$$

Man verfährt weiter so: Hat man das 2^{n+1}-eck P_n schon gefunden, so geht man zum 2^{n+2}-eck P_{n+1} über. Dabei ist analog wieder

$$F(P_{n+1}) - F(P_n) > \frac{1}{2}\big(F(K) - F(P_n)\big).$$

Beim Übergang von $K \setminus P_n$ zu $K \setminus P_{n+1}$ wurde wieder mehr als die Hälfte der zuvor verbliebenen Fläche entfernt und die letzte Ungleichung kann wieder umgeformt werden zu

$$F(K) - F(P_{n+1}) < \frac{1}{2}\big(F(K) - F(P_n)\big).$$

D.h. es sind alle Voraussetzungen von Buch X, 1 erfüllt und daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$F(K) - F(P_n) < F(K) - \mu \quad \text{und daher} \quad F(P_n) > \mu.$$

Man schreibt nun auch L ein regelmäßiges 2^{n+1}-eck Q_n ein, das offenbar zu P_n ähnlich ist. Wegen Buch XII, 1 gilt

$$\frac{F(Q_n)}{F(P_n)} = \frac{\ell^2}{d^2} = \frac{F(L)}{\mu}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\mu}{F(P_n)} = \frac{F(L)}{F(Q_n)} > 1$$

und somit

$$\mu > F(P_n),$$

was ein Widerspruch ist. Also ist

$$F(L)\frac{d^2}{\ell^2} < F(K)$$

unmöglich.

Die Annahme

$$F(L)\frac{d^2}{\ell^2} > F(K)$$

kann zu

$$F(L) > \frac{\ell^2}{d^2}F(K)$$

umgeformt werden. Aus Symmetriegründen ist auch dieser Fall unmöglich. D.h. die einzig verbleibende Möglichkeit ist, dass

$$F(L)\frac{d^2}{\ell^2} = F(K)$$

oder

$$\frac{F(L)}{F(K)} = \frac{\ell^2}{d^2}.$$

Die folgenden Propositionen folgen für uns aus der Tatsache, dass eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh$ besitzt:

Buch XII, 5 *Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.*

Buch XII, 6 *Pyramiden mit vieleckigen Grundflächen unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.*

Buch XII, 9 *In gleichen Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen, in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.*

Die folgenden Propositionen folgen für uns aus der Tatsache, dass ein Kegel (bzw. ein Zylinder) mit Grundfläche G und Höhe h das Volumen $V = \frac{1}{3}Gh$ (bzw. $V = Gh$) besitzt:

Buch XII, 10 *Jeder Kegel ist ein Drittel des Zylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und gleiche Höhe hat.*

Buch XII, 11 *Kegel, sowie Zylinder, unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.*

Buch XII, 14 *Kegel, sowie Zylinder, auf gleichen Grundflächen, verhalten sich zueinander wie die Höhen.*

Buch XII, 15 *In gleichen Kegeln, sowie Zylindern, sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Kegel, sowie Zylinder, in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.*

Buch XII endet mit der Behandlung des Kugelvolumens und der folgenden Proposition:

Buch XII, 18 *Kugeln stehen zueinander dreimal im Verhältnis ihrer Durchmesser.*

Für uns bringt das folgendes zum Ausdruck: Haben zwei Kugeln Radien r_1 und r_2, so erfüllen Ihre Volumen $\frac{4}{3}\pi r_1^3$ und $\frac{4}{3}\pi r_2^3$ die Gleichung

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_2^3} = \frac{(2r_1)^3}{(2r_2)^3}.$$

4.24 Buch XIII der Elemente

Buch XIII behandelt die Seitenlängen einiger regulärer Polygone, die Konstruktion der Platonischen Körper sowie ihre Kantenlängen.

- Buch XIII, 11 Ein regelmäßiges Fünfeck, das einem Kreis mit Radius r eingeschrieben ist, hat Seitenlänge

$$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

(Das folgt aus Resultaten in den Abschnitten 3.5 und 4.18.)

- Buch XIII, 12 Ein gleichseitiges Dreieck, das einem Kreis mit Radius r eingeschrieben ist, hat Seitenlänge $r\sqrt{3}$.

- Buch XIII, 13 Konstruktion des regelmäßigen Tetraeders. Die Umkugel eines Tetraeders mit Kantenlänge a hat Durchmesser

$$a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

- Buch XIII, 14 Konstruktion des Oktaeders. Die Umkugel eines Oktaeders mit Kantenlänge a hat Durchmesser $a\sqrt{2}$.

- Buch XIII, 15 Konstruktion des Würfels. Die Umkugel eines Würfels mit Kantenlänge a hat Durchmesser $\sqrt{3}a$.

- Buch XIII, 16 Konstruktion des Ikosaeders. Hat die Umkugel des Ikosaeders Radius r, so hat der Ikosaeder Kantenlänge

$$\frac{r}{\sqrt{5}}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

- Buch XIII, 17 Konstruktion des Dodekaeders. Hat die Umkugel des Dodekaeders Radius r, so hat der Dodekaeder Kantenlänge

$$r\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}}.$$

Die Elemente des Euklid enden mit dem folgenden Zusatz zu Buch XIII, 18:

Weiters behaupte ich, dass sich außer den besprochenen fünf Körpern kein weiterer Körper errichten lässt, der von einander gleichen gleichseitigen und gleichwinkeligen Figuren umfasst würde.