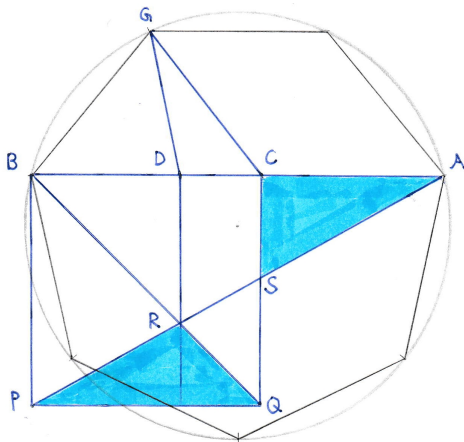


4.27 Konstruktion des Heptagons

Die folgende Konstruktion eines regelmäßigen Siebenecks wurde von Mathematikern des mittelalterlichen Islam Archimedes zugeschrieben und intensiv studiert.



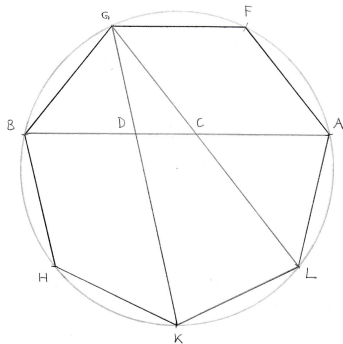
- ▶ Ausgangspunkt ist das Quadrat $BCQP$, in dem auch die Diagonale BQ eingezeichnet wird.
- ▶ Nun wird durch den Punkt P eine Gerade gelegt, derart, dass die beiden Dreiecke PQR und ACS den selben Flächeninhalt haben (verallgemeinerte Einschiebung). Dabei ist R der Schnittpunkt der gesuchten Geraden mit der Diagonale BQ und A der Schnittpunkt der gesuchten Gerade mit der Verlängerung der Strecke BC .
- ▶ Lege eine Gerade durch den Punkt R , die zur Strecke BP parallel ist und schneide sie mit der Strecke BC . Man erhält so den Punkt D .
- ▶ Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt D und Radius \overline{BD} und einen zweiten Kreis mit Mittelpunkt C und Radius \overline{AC} . Als Schnittpunkt der beiden Kreise erhält man den Punkt G .

- ▶ Die drei Punkte A , B und G sind Ecken des zu konstruierenden Heptagons.
- ▶ Das ermöglicht, den Mittelpunkt seines Umkreises zu finden und den Umkreis zu zeichnen.
- ▶ Weiters ist die Strecke BG eine Seite des gesuchten Heptagons.
- ▶ Die Konstruktion der restlichen Eckpunkte des Heptagons ist nun offensichtlich.

Diese Konstruktion ist außerordentlich originell und einzigartig (was dafür spricht, dass sie tatsächlich von Archimedes stammt).

Allerdings ist sie für die Praxis nicht geeignet, da die Konstruktion der Geraden im zweiten Konstruktionsschritt kaum mit der nötigen Genauigkeit durchgeführt werden kann.

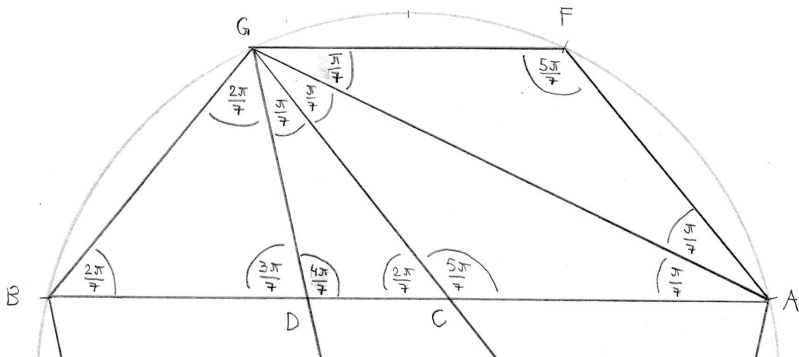
Die Konstruktion beruht auf einer Analyse der Längen der Teile, in die die Diagonalen des Siebenecks einander durch Schnitt teilen.



Wir behaupten, in der obigen Skizze gilt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}.$$

Um diese beiden Relationen zu beweisen, untersuchen wir zunächst den oberen Teil der letzten Skizze genauer und beweisen, dass alle eingezeichneten Winkel den behaupteten Wert haben:



- ▶ Als Ausgangspunkt verwenden wir, dass $\angle AFG = 5\pi/7$.
- ▶ Da das Dreieck AFG gleichschenkelig ist (und seine Winkelsumme π), folgt $\angle FGA = \angle FAG = \pi/7$.
- ▶ Aus Symmetriegründen ist die Strecke AB parallel zur Seite FG und ebenso die Strecke GL parallel zur Seite AF . Beim Viereck $AFGC$ handelt es sich daher um eine Raute und folglich $\angle ACG = 5\pi/7$ und $\angle AGC = \angle GAC = \pi/7$.
- ▶ Es folgt sofort $\angle DCG = 2\pi/7$.
- ▶ Nach dem Peripheriewinkelsatz wird jede Seite des Siebenecks von einem der fünf weiteren Eckpunkte aus unter dem selben Winkel gesehen. Daher ist $\angle CGD = \angle LGK = \angle FAG = \pi/7$.
- ▶ Es folgt $\angle CDG = 4\pi/7$ (Winkelsumme im Dreieck CDG).
- ▶ Es folgt sofort $\angle BDG = 3\pi/7$.
- ▶ Aus Symmetriegründen gilt $\angle DBG = 2\pi/7$.
- ▶ Es folgt $\angle BGD = 2\pi/7$ (Winkelsumme im Dreieck BDG).

Wir können nun die beiden Relationen $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = \overline{BD}^2$ und $\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \overline{AC}^2$ zeigen.

Da die Strecken BG , AF und FG Seiten des Heptagons sind, gilt

$$\overline{BG} = \overline{AF} = \overline{FG} = 2r \sin \frac{\pi}{7},$$

wobei r den Radius des Umkreises bezeichnet. Da es sich beim Viereck $AFGC$ um eine Raute handelt, ist auch

$$\overline{AC} = \overline{CG} = 2r \sin \frac{\pi}{7}.$$

Anwendung des Sinussatz liefert

$$\frac{\overline{AG}}{2r \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{\sin \frac{5\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}}.$$

Daher ist

$$\overline{AG} = 2r \sin \frac{5\pi}{7} = 2r \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{7} \right) = 2r \sin \frac{2\pi}{7}.$$

Anwendung von Eigenschaft (1) aus dem Abschnitt über die Kreismessung liefert

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \frac{2r \sin \frac{2\pi}{7}}{2r \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = 2 \cos \frac{\pi}{7}$$

und mit Hilfe des Sinussatzes folgt

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{CD}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = 2 \cos \frac{\pi}{7},$$

womit die erste der beiden Relationen bewiesen ist.

Unter Verwendung von Symmetrieeigenschaften folgen mit Hilfe des Sinussatzes nun

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{3\pi}{7}}$$

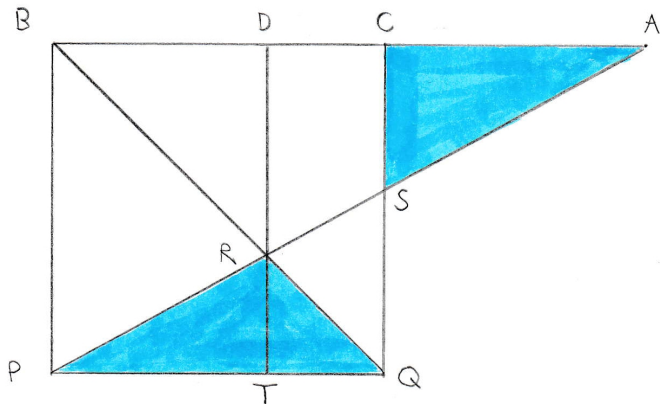
und

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{CG}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin(\pi - \frac{3\pi}{7})} = \frac{\sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{3\pi}{7}}.$$

Damit ist auch die zweite Relation bewiesen.

Die Idee der Konstruktion ist es nun, zuerst die Diagonale AB und darauf die Punkte C und D zu konstruieren. (Daraus lässt sich der Punkt G konstruieren, womit man drei Eckpunkte des Siebenecks und eine seiner Seiten gefunden hat.)

Genau das wird nun durch den Beginn der Konstruktion (mit der verallgemeinerten Einschiebung) geleistet.



Da die Dreiecke PRT und ADR ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DR}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}},$$

d.h. die erste Relation ist erfüllt.

Aus der Flächengleichheit der beiden Dreiecke PQR und ACS folgt

$$\overline{BC} \cdot \overline{CD} = \overline{PQ} \cdot \overline{RT} = \overline{AC} \cdot \overline{CS}$$

und daher

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{RT}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}},$$

wobei im vorletzten Schritt verwendet wurde, dass die Dreiecke PRT und ACS ähnlich sind. D.h. auch die zweite Relation ist erfüllt.

Es bleibt die Frage, ob man diese verallgemeinerte Einschiebung (zumindest im Prinzip) immer durchführen kann. Das folgt (für uns) aus dem Zwischenwertsatz.

Legt man die Gerade durch P so, dass sie mit der Diagonale CP zusammenfällt, so liegt R im Mittelpunkt des Quadrats $BCQP$ und A fällt mit C zusammen. Das Dreieck PQR hat die Fläche $\frac{1}{4}BC^2$ und das Dreieck ACS hat Fläche 0.

Lässt man den Punkt R nun auf der Diagonale BQ in Richtung Q wandern, so wächst die Fläche des Dreiecks ACS streng monoton und stetig und wird beliebig groß, wenn sich R an Q annähert. Die Fläche des Dreiecks PQR dagegen fällt streng monoton und stetig und geht gegen 0, wenn sich R an Q annähert.

Es muss daher eine eindeutig bestimmte Lage der Gerade durch P geben, bei der die Flächeninhalte der beiden Dreiecke PQR und ACS übereinstimmen.

Wir begründen nochmals mit einfachen analytischen Methoden, dass die Archimedes verwendete verallgemeinerte Einschubung stets eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Zu diesem Zweck setzen wir $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = x$ und $\overline{AC} = y$. Mit diesen Bezeichnungen kann man die Gleichung

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

umschreiben zu

$$\frac{a - x + y}{x} = \frac{x}{a - x} \quad \text{oder} \quad x^2 = (a - x)(y + a - x)$$

und die Gleichung

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$$

zu

$$\frac{y}{a} = \frac{x}{y} \quad \text{oder} \quad y^2 = ax.$$

Zu zeigen ist, dass es eindeutig bestimmte x, y gibt, die diese beiden Gleichungen sowie $0 < x < a$ und $y > 0$ erfüllen.

Es muss sogar $\frac{a}{2} < x < a$ gelten, da der Punkt A sonst auf der Quadratseite BC liegen würde, was nicht zur Konstruktion passt.

Die erste Bedingung kann man zu

$$y = \frac{x^2}{a-x} - (a-x) = \frac{x^2 - (a-x)^2}{a-x} = \frac{2ax - a^2}{a-x} = a \frac{2x - a}{a-x}$$

umformen. Man sieht, dass y durch x eindeutig bestimmt ist.

Setzt man die letzte Gleichung in die zweite Bedingung $y^2 = ax$ ein, so erhält man

$$ax = a^2 \left(\frac{2x - a}{a - x} \right)^2 \quad \text{oder} \quad x(a - x)^2 = a(2x - a)^2,$$

woraus sich nach ein paar Umformungen die kubische Gleichung

$$x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3 = 0$$

ergibt. Setzt man

$$p(x) := x^3 - 6ax^2 + 5a^2x - a^3,$$

so sieht man sofort $p(0) = p(a) = -a^3 < 0$ und $p\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{8} > 0$.

Weiters ist

$$p'(x) = 3x^2 - 12ax + 5a^2 \quad \text{und} \quad p''(x) = 6x - 12a.$$

Die Nullstellen von p' sind

$$x_1 = \left(2 - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)a \quad \text{und} \quad x_2 = \left(2 + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)a.$$

Wegen

$$p''\left(\left(2 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}\right)a\right) = \pm 2\sqrt{21}a$$

besitzt p ein Maximum bei

$$x_1 = \left(2 - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)a \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$$

und ein Minimum bei $x_2 > a$.

Insgesamt erkennt man folgendes:

Die Funktion p ist auf $(-\infty, x_1)$ streng monoton wachsend, auf (x_1, x_2) streng monoton fallend und auf $(x_2, +\infty)$ streng monoton wachsend.

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt p eine Nullstelle im Intervall $(0, \frac{a}{2})$ und eine zweite im Intervall $(\frac{a}{2}, a)$. Da $p(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$, liegt die dritte Nullstelle von p im Intervall $(a, +\infty)$.

D.h. p besitzt genau eine Nullstelle im Intervall $(\frac{a}{2}, a)$. Das bedeutet gerade, dass die verallgemeinerte Einschiebung eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.