4.29 Einige weitere griechisch-hellenistische Mathematiker zur Zeit von Archimedes und danach

Eratosthenes von Kyrene (3. Jhd. v.Chr.) war Zeitgenosse von Archimedes und wurde von diesem offenbar geschätzt.

Er war Universalgelehrter und beschäftigte sich mit allen Wissensgebieten.

Das trug ihm die Bezeichnungen *Beta* und *Pentathlos* ein. (Beta weil er auf allen Gebieten der Zweitbeste war und Pentathlos weil er wie ein Athlet, der in mehreren Disziplinen antritt, überall gut aber nirgends führend war.)

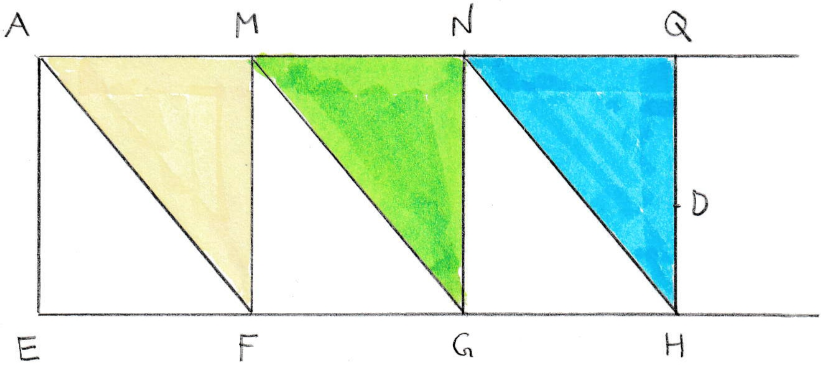
Bekannt sind seine Leistungen in der Geographie, insbesondere seine (recht genaue) Berechnung des Erdumfangs.

Von seinen mathematischen Resultaten kennt man

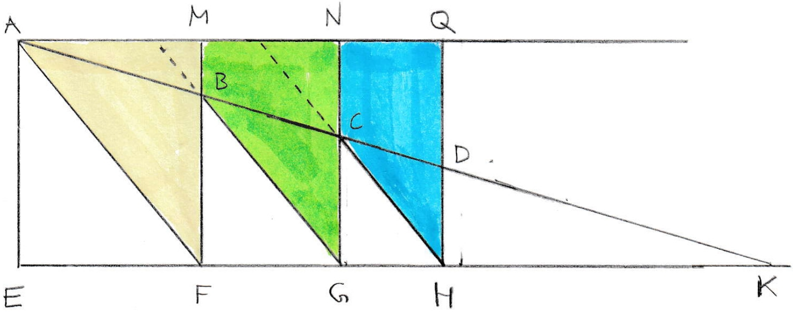
- das (von Nikomachus überlieferte) Sieb des Eratosthenes zur Bestimmung aller Primzahlen bis zu einer bestimmten Schranke
- und ein (von Pappus und Eutokios beschriebenes) mechanisches Verfahren zum Finden zweier mittlerer Proportionale (d.h. eine Lösung von Hippokrathes' Umformulierung des Delischen Problems).

Andere seiner Werke, die nicht erhalten sind, werden von Theon und Pappos erwähnt.

In einem Rahmen befinden sich das (feste) Dreieck AFM und die beiden verschiebbaren Dreiecke GMN und HNQ. Auf der Dreiecksseite HQ ist der Punkt D markiert. Gesucht sind zwei mittlere Proportionale zwischen den Längen $\overline{AE}$ und $\overline{DH}$.



Die beiden Dreicke GMN und HNQ werden nun verschoben, bis die Schnittpunkte B und C auf einer Gerade mit A und D liegen.



Die Längen $\overline{BF}$ und $\overline{CG}$ sind dann die gesuchten beiden mittleren Proportionalen.

Da die Dreiecke AEK und BFK ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{BK}}.$$

Da die Dreiecke AFK und BGK ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{GK}}.$$

Da die Dreiecke BFK und CGK ähnlich sind, gilt

$$\frac{\overline{FK}}{\overline{GK}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}}.$$

Damit ist insgesamt gezeigt, dass

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CG}}.$$

Die Gleichung

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{CG}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{DH}}$$

zeigt man völlig analog.

Apollonius von Perge (3. und frühes 2. Jhd.v.Chr.) war ein wenig jünger als Archimedes und stammte (laut Eutokios) aus Perge.

Die meisten bekannten Informationen über sein Leben stammen aus den Begleitbriefen zu den verschiedenen Büchern der von ihm verfassten *Conica.*

Diesen kann man entnehmen, dass seine Reisen ihn nach Alexandria, Ephesos und Pergamon geführt haben und er in Kontakt mit anderen Gelehrten stand.

Sein Hauptwerk sind die *Conica*, die aus acht Büchern bestanden und eine Theorie der Kegelschnitte enthalten. Die Bücher I bis IV sind auf Griechisch erhalten, die Bücher V bis VII in arabischer Übersetzung. Buch VIII ist verloren (es gibt allerdings Versuche, es zu rekonstruieren).

Die *Conica* dürften alle früheren Darstellungen der Theorie der Kegelschnitte (von Euklid und anderen) verdrängt haben.

Die *Conica* sind für uns nur schwer verständlich. Einerseits erreicht Appolonius einen sehr hohen Abstraktionsgrad, andererseits verwendet er natürlich keine kartesischen Koordinaten, die für uns die natürliche Sprache für die Behandlung von Kegelschnitten wäre.

Von Apollonius' anderen Werken sind die aus zwei Büchern bestehenden *Verhältnisschnitte* (in arabischer Übersetzung) erhalten.

Über weitere verlorene Werke und Ergebnisse berichten unter anderem Pappos und Proklos.

Darunter sind z.B. auch die Resultate über die Verhältnisse der Volumina und Oberflächen von Dodekaeder und Ikosaeder über die Hypsikles im XIV. Buch der Elemente berichtet.

Bekannt ist die folgende Aufgabenstellung, die von Pappos in seiner *Collectio* Apollonius zugeschrieben wird.

Gegeben seien drei Objekte, von denen jedes ein Punkt, eine Gerade oder ein Kreis sein kann. Gesucht ist ein Kreis, der durch die Punkte geht (soferne welche gegeben sind) und die Geraden und Kreise berührt.

Der Fall, dass drei Kreise gegeben sind (und ein Kreis gesucht ist, der alle drei berührt), ist als *Problem des Apollonius* bekannt geworden und von zahlreichen Mathematikern (darunter Vieta und Newton) behandelt worden.

(Fasst man Punkte bzw. Geraden als Kreise mit Radius 0 bzw. unendlich großem Radius auf, enthält das Problem die gesamte ursprüngliche Fragestellung.)

In den ersten vier Büchern der *Conica* gibt Apollonius eine elementare Einführung in die Theorie der Kegelschnitte (wie er selbst schreibt), in den vier restlichen beschreibt er weiterführende Resultate (von denen viele von ihm selbst stammen dürften).

Apollonius' Definition eines Kegels unterscheidet sich von der von Euklid in Buch XI der Elemente gegebenen. Bei Euklid entsteht der Kegel durch Rotation eines rechtwinkeligen Dreiecks um eine Kathete und ist daher gerade und beschränkt.

Apollonius geht hingegen folgendermaßen vor: Gegeben sei eine Kreislinie (im Raum) und ein Punkt, der nicht in der Ebene des Kreises liegt. Nun legt er durch den Punkt und einen Punkt auf der Kreislinie eine Gerade. Lässt man den Punkt auf der Kreislinie rund um den Kreis wandern, entsteht ein unbeschränkter (Doppel)Kegel, der auch schief sein kann.

In den Propositionen 11 bis 13 von Buch I zeigt er, dass durch den Schnitt einer Ebene mit einem Kegel Parabeln, Hyperbeln und Ellipsen entstehen.

So formuliert, klingt das paradox, so als wollte man sagen: Durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene entsteht ein Kegelschnitt.

Tatsächlich führt Apollonius diese Bezeichnungen an dieser Stelle ein. Der Grund dafür ist, dass er alle Kegelschnitt einheitlich behandelnd, verschiedene Größen zueinander in Relation setzt.

Je nachdem, ob sich dabei Gleichheit, ein Überschuss oder ein Mangel ergibt, spricht er von einer Parabel, einer Hyperbel oder einer Ellipse.

In moderner Terminologie behandelt Apollonius in den Büchern I bis VII die folgenden Themen:

- **Buch I:** Mittelpunkt, Durchmesser und konjugierte Durchmesser
- **Buch II:** Achsen und Asymptoten der Hyperbel
- **Buch III:** Brennpunkte, Pol und Polare, projektive Erzeugung der Kegelschnitte
- **Buch IV:** Anzahl der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte (Beweis, dass es höchstens vier Schnittpunkte gibt)
- **Buch V:** Normalen und Subnormalen von Kegelschnitten, Krümmungsmittelpunkte
- **Buch VI:** Ähnliche Kegelschnitte
- **Buch VII:** Spezielle Eigenschaften konjugierter Durchmesser

Nikomedes (2. oder 3.Jhd.v.Chr.) fand die Konchoide, die wir im Abschnitt 4.5 im Zusammenhang mit Einschiebungen betrachtet haben.

Er steht hier stellvertretend für eine größere Zahl weniger bekannter Geometer, deren Leistungen nicht an die ihrer großen Vorgänger (wie Euklid, Archimedes und Apollonius) heranreichten.

Heron von Alexandria (vermutlich 1. Jhd.n.Chr.)

Trotz seiner großen Bekanntheit variieren die Vermutungen darüber, wann er gelebt hat, stark. Er lebte zwischen 150 v.Chr. und 200 n.Chr. (oder vielleicht sogar etwas später). Heute nimmt man meistens an, dass er gegen Ende des 1. Jhd. gelebt hat.

Heron war Ingeneur und angewandter Mathematiker. Dementsprechend unterscheidet sich sein Denken stark von dem der bisher beschriebenen griechisch-hellenistischen Mathematiker.

Anders als diesen reicht ihm oft eine näherungsweise Berechnung, die für praktische Zwecke ausreichend genau ist. Hier knüpft er an die ägyptische und mesopotamische Mathematik an.

Heron multipliziert z.B. auch zwei Flächeninhalte. Auch das zeigt, dass er eher in Zahlen und weniger in geometrischen Begriffen gedacht hat.

Allerdings findet man auch bei Heron Beweise in der Tradition der großen Geometer, so z.B. in den *Metrica* für die Heronsche Formel. In diesem Beweis verweist er siebenmal auf die Elemente des Euklid.

Heron hat eine große Zahl von Büchern über Mechanik verfasst. Primär mathematisch orientiert waren sein Werke

- *Metrica* (drei Bücher über Vermessungslehre),
- *Geometrica* (Flächenberechnungen) und
- *Stereometrica* (Volumsberechnungen).

Herons Schriften wurden zu weit verbreiteten Standardwerken. Sie wurden immer wieder ergänzt und überarbeitet und es ist nicht klar, welche der überlieferten Texte von ihm selbst stammen.

Ein bekanntes Beispiel für von Heron angegebene Näherungen ist die näherungsweise Berechnung von Quadratwurzeln. (Sie ist uns bereits im Kapitel über mesopotamische Mathematik begegnet und dort auch begründet worden.)

Bei Heron findet man sie in den *Metrica.* Ist $b = a^2 \pm r$, wobei a^2 das b am nächsten liegende Quadrat bezeichnet, so ist

$$\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}.$$

Mit Heron am stärksten in Verbindung gebracht wird die folgende nach ihm benannte Formel (die allerdings schon Archimedes gekannt haben dürfte).

Haben die drei Seiten eines Dreiecks die Längen a, b und c und bezeichnet

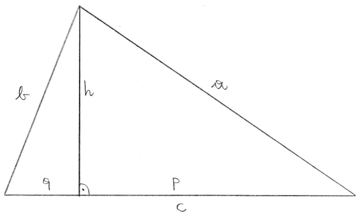
$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

den halben Umfang des Dreiecks, so ist

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei A den Flächeninhalt des Dreiecks bezeichnet.

Wir geben zunächst einen modernen Beweis, der nur den Satz des Pythagoras und einige geschickte Umformungen benötigt.



Nach dem Satz des Pythagoras gilt

$$b^2 - q^2 = h^2 = a^2 - p^2$$

und daher

$$b^2 - a^2 = q^2 - p^2 = (q - p)(q + p) = (q - p)c.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{b^2 - a^2}{c} = q - p,$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2 - a^2}{c} + c = q - p + q + p = 2q$$

und daher

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Das ermöglicht es nun, die Länge der Höhe h durch die Seitenlängen a, b und c auszudrücken:

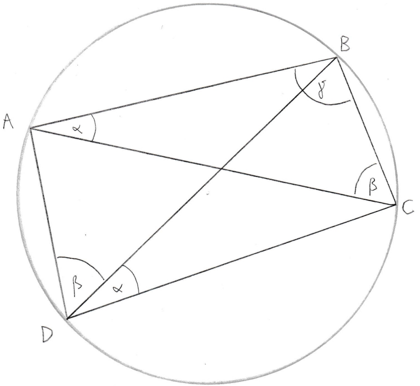
$$
\begin{aligned}
h^2 = b^2 - q^2 &= (b+q)(b-q) \\
&= \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \\
&= \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-b^2+2bc-c^2}{2c} \\
&= \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} \\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2} \\
&= 4\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}
\end{aligned}
$$

und daher

$$
A^2 = \frac{1}{4}c^2h^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).
$$

Bevor wir Herons Beweis beschreiben, holen wir Prop. 22 aus Buch III der Elemente des Euklid nach, die von Heron verwendet wird.

Buch III, 22 *In jedem einem Kreise einbeschriebenen Viereck sind gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechten gleich.*



Anwendung des Peripheriewinkelsatzes auf die Sehne BC liefert

$$\angle BAC = \angle BDC.$$

Anwendung des Peripheriewinkelsatzes auf die Sehne AB liefert

$$\angle ACB = \angle ADB.$$

Daher ist

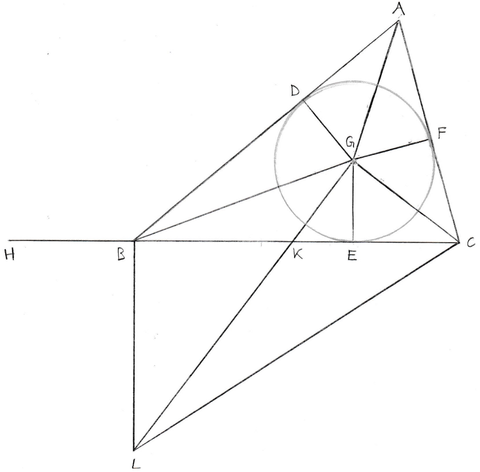
$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = \angle BAC + \angle ACB$$

und somit

$$\angle ABC + \angle ADC = \angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ,$$

da im Dreieck ABC die Winkelsumme 180° beträgt.

Wir beschreiben nun den Beweis, den Heron in *Metrica* I,8 gibt. Da wir die Buchstaben A und F zur Bezeichnung von Punkten verwenden wollen, verwenden wir $\mathrm{F}(M)$ um den Flächeninhalt von M zu bezeichnen.



Gegeben sei das Dreieck ABC. Weiters sei G sein Inkreismittelpunkt und D, E und F die drei Punkte, in denen der Inkreis die Seiten berührt. Nun gilt offenbar

$$\overline{BC} \cdot \overline{EG} = 2 \cdot \mathrm{F}(\text{Dreieck } BCG)$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{FG} = 2 \cdot \mathrm{F}(\text{Dreieck } ACG)$$

und

$$\overline{AB} \cdot \overline{DG} = 2 \cdot \mathrm{F}(\text{Dreieck } ABG).$$

Da $\overline{EG} = \overline{FG} = \overline{DG}$ der Inkreisradius ist, folgt

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) \cdot \overline{EG}$$

$$= 2 \cdot \big(\mathrm{F}(\text{Dreieck } BCG) + \mathrm{F}(\text{Dreieck } ACG) + \mathrm{F}(\text{Dreieck } ABG)\big)$$

$$= 2 \cdot \mathrm{F}(\text{Dreieck } ABC).$$

D.h. das Produkt aus Umfang und Inkreisradius ergibt das Doppelte des Flächeninhalts. Die Strecke BC wird nun um eine Strecke BH mit der Länge $\overline{BH} = \overline{AD}$ verlängert. Offenbar ist

$$\overline{CH} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) = s.$$

Also ist

$$\overline{CH} \cdot \overline{EG} = \mathrm{F}(\text{Dreieck } ABC)$$

und daher

$$\mathrm{F}(\text{Dreieck } ABC)^2 = \overline{CH}^2 \cdot \overline{EG}^2.$$

Nun werde eine Gerade durch den Punkt G gelegt, die senkrecht auf die Strecke CG steht und eine Gerade durch den Punkt B, die senkrecht auf BC steht. Den Schnittpunkt der beiden Geraden bezeichnen wir mit L.

Da $\angle CBL = \angle CGL = 90^\circ$, liegen B und G beide auf dem Thaleskreis über der Strecke CL (die die gemeinsame Hypothenuse der beiden rechtwinkeligen Dreiecke BCL und CGL ist).

Daher ist das Viereck $CGBL$ einem Kreis eingeschrieben. Anwendung der oben bewiesenen Prop. 22 aus Buch **III** der Elemente gibt

$$\angle BGC + \angle BLC = 180^\circ.$$

Andererseits gilt auch

$$\angle BGC + \angle AGD = 180^\circ,$$

da beide Winkel zusammen genau die Hälfte des durch Winkelsymmetralen zerteilten Inkreises ausmachen. Daher ist $\angle AGD = \angle BLC$. Da auch $\angle CBL = \angle ADG = 90^\circ$, sind die Dreiecke AGD und BLC ähnlich.

Daraus folgt

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{EG}}$$

(wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass nach Konstruktion $\overline{AD} = \overline{BH}$ und $\overline{DG} = \overline{EG}$) und daher

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{BK}}{\overline{EK}}$$

(wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass die beiden Dreiecke BKL und EGK ähnlich sind). Daraus folgt

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC} + \overline{BH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} + 1 = \frac{\overline{BK}}{\overline{EK}} + 1 = \frac{\overline{BK} + \overline{EK}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EK}}$$

und somit

$$\frac{\overline{CH}^2}{\overline{CH}\cdot\overline{BH}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EK}} = \frac{\overline{BE}\cdot\overline{CE}}{\overline{KE}\cdot\overline{CE}} = \frac{\overline{BE}\cdot\overline{CE}}{\overline{EG}^2}.$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Höhensatz auf das rechtwinkelige Dreieck CGK angewendet. Insgesamt erhält man

$$\text{F(Dreieck } ABC)^2 = \overline{CH}^2 \cdot \overline{EG}^2 = \overline{CH}\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CE}\cdot\overline{BE}.$$

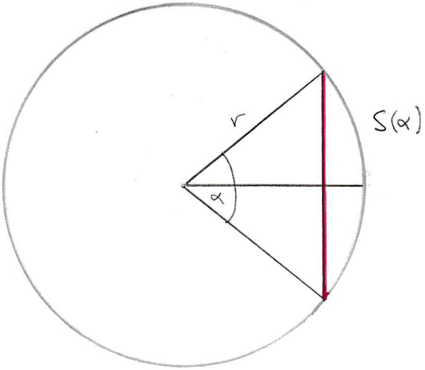
Damit ist die Behauptung bewiesen, denn

$$\overline{CH} = s,\ \overline{BH} = s - \overline{BC},\ \overline{CE} = s - \overline{AB} \text{ und } \overline{BE} = s - \overline{AC}.$$

Klaudios Ptolemaios (2. Jhd.n.Chr.) war Astronom. Er verfasste ein bedeutendes Werk über dieses Gebiet, in dem er auch die nötigen mathematischen Grundlagen behandelte (vor allem Trigonometrie, die als Teil der Astronomie galt).

Dieses Werk wurde *Matematike syntaxis* (mathematische Sammlung) und später *Megale syntaxis* (große Sammlung) genannt. Heute kennt man es meistens unter seinem arabischen Namen als *Almagest.* Es blieb bis zum Beginn der Neuzeit das wichtigste Werk über Astronomie.

Darin enthalten ist eine Tabelle der Länge der Sehnen zu gegebenem Winkel α.



Wir würden diese Sehnenlängen heute mit Hilfe der Sinusfunktion durch die Gleichung $S(\alpha) = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$ ausdrücken (wobei r den Kreisradius und $S(\alpha)$ die Länge der Sehne bezeichnet).

Ptolemaios gibt in seiner Tabelle Werte für $S(\alpha)$ mit α zwischen $\frac{1}{2}^\circ$ und 180° in Schritten von einem halben Grad an, d.h. für

$$\alpha \in \left\{ \frac{n}{2}^\circ \,\middle|\, n \in \{1, 2, 3, \ldots, 360\} \right\}.$$

Sein Ausgangspunkt sind dabei die Sehnen, die sich ergeben, wenn man ein regelmäßiges n-eck einem Kreis einschreibt, wobei $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$, d.h. für die Winkel

$$\alpha \in \{30^\circ, 36^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 72^\circ, 90^\circ, 120^\circ\}.$$

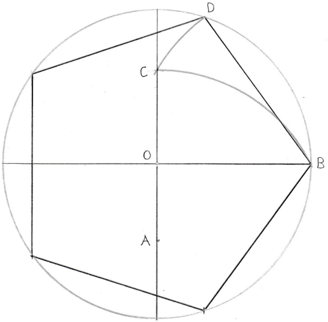
Er gibt in diesem Zusammenhang eine sehr effiziente Konstruktion für die Seite eines regelmäßigen Fünf- und Zehnecks an, die sich von der von Euklid in Prop. 11 von Buch IV der Elemente beschriebenen stark unterscheidet.

Um aus bekannten Werten für $S(\alpha)$ solche für andere Winkel (wie z.B. $S(\frac{\alpha}{2})$) berechnen zu können, beweist er eine Reihe von Relationen, in denen wir (in moderner Notation) Eigenschaften von Winkelfunktionen (wie z.B. Summesätze) erkennen.

Für Winkel α, für die sich der Wert $S(\alpha)$ mit Hilfe dieser Sätze nicht berechnen lässt, verwendet er ein Interpolationsverfahren.

Ptolemaios rechnet im Sexagesimalsystem, da es, wie er schreibt, praktischer ist. Er teilt den Radius des Kreises in 60 Teile und den Kreis in 360°. Damit knüpft auch er an die mesopotamische Mathematik an.

Wir beschreiben die Konstruktion, die Ptolemaios für die Fünfecks- und Zehnecksseite angibt und rechnen sie mit modernen Hilfsmitteln nach. (Ptolemaios beruft sich in seinem Beweis auf Buch XIII der Elemente des Euklid.)



Das Fünfeck soll einem gegebenen Kreis eingeschrieben werden. Zusätzlich ist oben schon ein Achsenkreuz eingezeichnet (dessen einer Schnittpunkt mit der Kreislinie der Punkt B ist).

Die Konstruktion verläuft folgendermaßen:

- Konstruiere den Punkt A, der in der Mitte zwischen Kreismittelpunkt 0 und Kreislinie liegt.
- Konstruiere den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius $\overline{AB}$.
- Durch Schnitt dieses Kreises mit der Gerade durch A und den Kreismittelpunkt 0 erhält man den Punkt C.
- Konstruiere den Kreis mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{BC}$.
- Durch Schnitt dieses Kreises mit der Kreislinie erhält man den Punkt D.

Die Punkte B und D sind benachbarte Punkte des Fünfecks. Mit Hilfe des Abstands $\overline{BD}$ bzw. mit Hilfe von Spiegelungen kann man nun leicht das restliche Fünfeck konstruieren.

Die Länge der Strecke $\overline{0C}$ ist die Länge der Seite eines Zehnecks, das dem gegebenen Kreis eingeschrieben ist.

Wir rechnen nun die oben angegebene Konstruktion nach, wobei wir annehmen, dass der Kreismittelpunkt die Koordinaten $(0, 0)$ und der Punkt B die Koordinaten $(1, 0)$ hat.

- Der Punkt A hat die Koordinaten $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
- Daher ist $\overline{AB} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
- Der Punkt C hat darum die Koordinaten $\left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.
- Folglich ist

$$\overline{BC} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

- Der Kreis mit Mittelpunkt B und Radius $\overline{BC}$ hat daher die Gleichung

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Der Punkt D ist ein Schnittpunkt der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad (x-1)^2 + y^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$2x - 1 = x^2 - (x-1)^2 = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

und daher

$$2x = \frac{\sqrt{5}-3}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

und

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos\frac{2\pi}{5} = \cos(72^\circ).$$

Da $y > 0$ und $x^2 + y^2 = 1$ ist auch $y = \sin(2\pi/5) = \sin(72^\circ)$ und BD eine Seite des Fünfecks.

Um zu überprüfen, dass $\overline{0C}$ die Länge der Seite eines Zehnecks ist, reicht es zu zeigen, dass

$$\overline{0C} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2\sin\frac{\pi}{10}.$$

Wir verwenden

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(was in 4.18 gezeigt wurde) als Ausgangspunkt, um $\sin\frac{\pi}{10}$ zu berechnen. Es folgt

$$\cos^2\frac{\pi}{5} = 1-\sin^2\frac{\pi}{5} = 1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}$$

und daher

$$\cos\frac{\pi}{5} = \cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Daraus erhält man

$$\sin^2\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}\Big(1-\cos\frac{\pi}{5}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}\Big)$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{16}$$

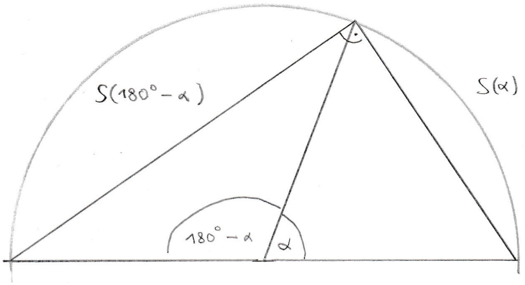
und schließlich

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin(18^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

woraus sich wie behauptet ergibt, dass

$$2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \overline{0C}.$$

Wir gehen noch kurz auf die von Ptolemaios verwendeten Identitäten ein. Z.B. kann man $S(180^\circ - \alpha)$ aus $S(\alpha)$ berechnen:



Aus dem Satz von Thales und dem Satz des Pythagoras folgt

$$S^2(\alpha) + S^2(180^\circ - \alpha) = (2r)^2 = 4r^2.$$

Schreibt man diese Gleichung in moderner Notation auf, so erhält man

$$4r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+4r^2\sin^2\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=4r^2$$

oder

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1.$$

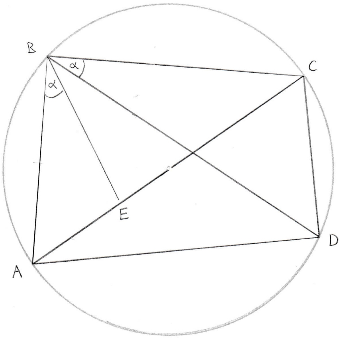
Andere von Ptolemaios angegebene und verwendete Identitäten werden modern notiert z.B. zu

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\alpha\right)$$

oder zu Summensätzen.

Um $S(\alpha+\beta)$ und $S(\alpha-\beta)$ (für $\alpha>\beta$) aus $S(\alpha)$ und $S(\beta)$ berechnen zu können, beweist Ptolemaios den heute nach ihm benannten *Satz des Ptolemaios.*

Es sei in den Kreis ein beliebiges Viereck ABCD einbeschrieben, in welchem man die Diagonalen AC und BD ziehe. Dann ist das aus den Diagonalen gebildete Rechteck gleich der Summe der aus den einander gegenüberliegenden Seiten gebildeten Rechtecke.



D.h. zu zeigen ist $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

Für den Beweis zeichnet man die Strecke BE derart, dass $\angle ABE = \angle CBD (= \alpha)$.

Nun gilt $\angle CBE = \angle ABD$ (nach Konstruktion) und $\angle BCE = \angle BCA = \angle ADB$ (nach dem Peripheriewinkelsatz angewandt auf die Sehne AB).

Daher sind die beiden Dreiecke BCE und ABD ähnlich und somit

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

oder

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{CE} \cdot \overline{BD}.$$

Weiter ist $\angle ABE = \angle CBD$ (nach Konstruktion) und $\angle BAE = \angle BAC = \angle BDC$ (nach dem Peripheriewinkelsatz angewandt auf die Sehne BC).

Daher sind die beiden Dreiecke ABE und BCD ähnlich und somit

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

oder

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AE} \cdot \overline{BD}.$$

Die Behauptung folgt nun durch Addition:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{CE} \cdot \overline{BD}$$

$$= (\overline{AE} + \overline{EC}) \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$