2. Altägyptische Mathematik
2.1 Quellen und Grundlegendes

- Etwa 10 mathematische Papyri (sowie ein Holzbrett und eine Lederrolle) sind erhalten geblieben. Am wichtigsten sind das Papyrus Rhind und das Moskauer Papyrus, die beide aus dem mittleren Reich stammen (also rund 4000 Jahre alt sind).
- Papyrus Rhind: Abschrift eines älteren Texts, in hieratischer Schrift beidseitig beschrieben, Enthält eine Tabelle (Darstellung von $\frac{2}{n}$ als Summe von Stammbrüchen für $5 \leq n \leq 101$, $2 \nmid n$) und circa 85 Aufgaben, befindet sich im British Museum in London: `https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057`
- Moskauer Papyrus: Ebenfalls in hieratischer Schrift, enthält 25 Aufgaben, befindet sich in Moskau.

- Die Mathematik in den erhaltenen Parpyri ist an praktischen Bedürfnissen ausgerichtet. Das Papyrus Rhind ist vermutlich ein Lehrbuch für Schreiber (d.h. Staatsbeamte).
- Dargestellt werden Rechnungen mit konkreten Zahlen.
- Die Korrektheit der Rechnungen wird nicht begründet, allerdings wird oft eine Probe gerechnet.
- Die Papyri aus dem mittleren Reich und der zweiten Zwischenzeit vermitteln eine Momentaufnahme über Kenntnisse zu dieser Zeit.
- Man weiß nichts über die Entstehung bzw. den Erwerb der Erkenntnisse.
- Eine zweite große Gruppe von erhaltenen Papyri stammt aus der griechisch-römischen Antike, ist also circa 1500 Jahre jünger. Sie sind in demotischer Schrift.

2.2 Zahldarstellung und Grundrechnungsarten

Alle auftretenden Zahlen sind positive ganze bzw. rationale Zahlen.

Für π wird (implizit) die (gute) Näherung $\frac{256}{81}$ verwendet.

Natürliche Zahlen werden in einem Zehnersystem dargestellt, allerdings handelt es sich nicht um ein Positionssystem, sondern es wurden verschiedene Symbole für jede Zehnerpotenz verwendet:

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
		Messleine	Lotusblume	Finger	Kaulquappe	Gott Heh

In der Hieroglyphenschrift wurden natürliche Zahlen durch Aneinanderreihen dieser Symbole geschrieben.

Ein Zeichen für Null () tritt nur vereinzelt auf (da es bei dieser Zahldarstellung nicht benötigt wird).

- Positive rationale Zahlen wurden als Summen von Stammbrüchen (d.h. $\frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$) geschrieben.
- Ein Stammbruch $\frac{1}{n}$ wurde geschrieben, indem man das Zeichen  über das Zeichen für n schrieb.
- Ausnahme: Für $\frac{2}{3}$ wurde das Zeichen  verwendt.
- Dazu kamen spezielle Zeichen für $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$. (z.B.  für $\frac{1}{2}$)
- Bei der Darstellung als Summe von Stammbrüchen wurde kein Stammbruch doppelt verwendet, d.h. es wurde z.B. nicht $\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ geschrieben, sondern $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$.
- Eine solche Darstellung ist immer möglich. Wegen der Gleichung $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ ist sie allerdings nicht eindeutig.

Für die praktische Rechnung reicht es aus, Brüche der Gestalt $\frac{2}{n}$ als Summe von Stammbrüchen schreiben zu können (da man den Zähler des Bruchs immer dyadisch entwickeln kann).

Das erklärt die Verwendung von Tabellen wie die im Papyrus Rhind, die z.B. folgende Identitäten angibt:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},\ \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \dots,$$

$$\dots, \frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198},\ \frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

Die ersten beiden Gleichungen folgen der Formel

$$\frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2n-1)},$$

die anderen meist nicht. Die letzte ergibt sich z.B. aus

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Multiplikation erfolgte durch sukzessives Verdoppeln, modern ausgedrückt: Ist $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Q}^+$, so entwickle

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$$

(mit $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \{0, 1\}$) und berechne

$$a \cdot b = a_0 \cdot b + a_1 \cdot 2b + a_2 \cdot 2^2 b + \cdots + a_n \cdot 2^n b.$$

Z.B. $13 \cdot 11 = (1 + 4 + 8) \cdot 11 = 11 + 44 + 88 = 143$ wurde im wesentlichen so geschrieben:

n	2^n	$2^n \cdot 11$
0	1	11
1	2	22
2	4	44
3	8	88

D.h. zuerst wurde 11 fortwährend verdoppelt, dann die Ergebnissen in den markierten Zeilen addiert.

Division durch Zweierpotenzen kann analog ausgeführt werden. Ist

$$a = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \cdots + a_n \cdot 2^n$$

(wieder mit $a_0, a_1 \ldots, a_n \in \{0, 1\}$), so ist

$$a : 2^m = a_0 \cdot 2^{-m} + a_1 \cdot 2^{1-m} + a_2 \cdot 2^{2-m} + \cdots + a_n \cdot 2^{n-m}$$

Um z.B. 21 : 8 zu berechnen, verwendet man

$$21 = 16 + 4 + 1 = 8(2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8})$$

und daher $\frac{21}{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$:

n	2^n	$2^n \cdot 8$
0	1	8
1	2	16
-1	1/2	4
-2	1/4	2
-3	1/8	1

Andere Divisionen wurden mit ad-hoc Methoden durchgeführt, z.B. Darstellung von 30 : 106 als Summe von Stammbrüchen (Papyrus Rhind, Aufgabe 36):

k	$k \cdot 106$
1	106
1/2	53
1/4	26+1/2
1/106	1
1/53	2
1/212	1/2

Modern ausgedrückt:
$30 = (26 + \frac{1}{2}) + 2 + 1 + \frac{1}{2} = 106 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{53} + \frac{1}{106} + \frac{1}{212})$ und daher $\frac{30}{106} = \frac{1}{4} + \frac{1}{53} + \frac{1}{106} + \frac{1}{212}$. (Verwendet man hier nur Zweierpotenzen, so erhält man eine unendliche periodische Entwicklung mit Periode 52.)

2.3 Lösen von Gleichungen

Lineare Gleichungen der Gestalt $ax = c$ wurden mit der Methode des falschen Ansatzes gelöst: Man wählt ein passendes x_1 und berechnet $c_1 := ax_1$. Ist $c_1 \neq c$, so ist x_1 keine Lösung, aber es gilt

$$\frac{x}{x_1} = \frac{ax}{ax_1} = \frac{c}{c_1} \text{ und daher } x = \frac{c}{c_1}x_1.$$

Der Vorteil dieser Methode ist, dass man keine Unbekannte x verwenden muss. Sie war weit verbreitet und wurde auch in Europa bis ins Mittelalter verwendet.

Z.B. lautet Aufgabe 26 im Papyrus Rhind: Eine Größe und ihr Viertel ergeben zusammen 15. Wie groß ist die Größe?
Als Lösung wird angegeben: Rechne mit 4, d.h. wähle $x_1 = 4$.
Dann ist $c_1 = x_1 + \frac{x_1}{4} = 5$, $\frac{c}{c_1} = \frac{15}{5} = 3$ und daher
$x = x_1 \cdot \frac{c}{c_1} = 4 \cdot 3 = 12$. Danach wird noch die Probe gerechnet (d.h. $12 + \frac{12}{4} = 15$).

Reinquadratische Gleichungen konnten gelöst werden, wenn die Wurzel aus dem Quadrat einer rationalen Zahl zu ziehen war.

Z.B. lautet Aufgabe 6 im Moskauer Papyrus: Gegeben sei ein Rechteck mit Länge x und Breite y (wobei $y = \frac{3}{4}x$) und Flächeninhalt $xy = 12$. D.h. die moderne Lösung ist $\frac{3}{4}x^2 = 12$, daher $x^2 = 16$, $x = 4$ und $y = 3$.

Nachfolgend ein Problem aus dem Berliner Papyrus 6619: Gegeben sind zwei Quadrate mit Seitenlängen x und y, wobei $y = \frac{3}{4}x$ und $x^2 + y^2 = 100$. (Die moderne Lösung wäre $(1 + \frac{9}{16})x^2 = 100$, daher $\frac{25}{16}x^2 = 100$, $x^2 = 64$ und somit $x = 8$ und $y = 6$.) Auch dieses Problem wird mit der Methode des falschen Ansatzes gelöst.

Nimm ein Quadrat mit Seite 1	Wähle $x_1 = 1$ als falschen Ansatz
und nimm $\frac{3}{4}$ von 1, das ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ als Seite der anderen Fläche	Dann ist $y_1 = \frac{3}{4}x_1 = \frac{3}{4}$
Multipliziere $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ mit sich selbst, das ergibt $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	$y_1^2 = (\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
Wenn also die Seite der einen Fläche als 1, die der anderen als $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ angenommen ist, addiere die beiden Flächen, Ergebnis ist $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	$\frac{25}{16}x_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
Ziehe daraus die Wurzel, das ist $1 + \frac{1}{4}$	$\sqrt{\frac{25}{16}x_1^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$
Ziehe die Wurzel aus der gegebenen Zahl 100, das ist 10	$\sqrt{100} = 10$
Wie oft geht $1 + \frac{1}{4}$ in 10 auf? Es geht 8 mal.	$x = \sqrt{\frac{25}{16}x^2} / \sqrt{\frac{25}{16}x_1^2} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25/16}} = \frac{10}{5/4} = 8$

Einige Aufgaben würde man modern als die Berechnung der Glieder endlicher arithmethischer (bzw. geometrischer) Reihen interpretieren. Z.B. lautet Aufgabe 64 im Papyrus Rhind: 10 hekat (ein Hohlmaß) Gerste sind unter zehn Männern so aufzuteilen, dass jeder Mann $\frac{1}{8}$ hekat weniger erhält als der vorherige. In moderner Notation: Ist x der größte Anteil, so sind die Anteile $x, x-d, x-2d, \ldots, x-(n-1)d$ (wobei hier $n=10$, $d=\frac{1}{8}$) und die Summe der Anteile ist $s=10$, d.h.

$$s = \sum_{k=0}^{n-1}(x-kd) = nx - d\frac{(n-1)n}{2}$$

und daher $\frac{s}{n} = x - \frac{1}{2}d(n-1)$ und

$$x = \frac{s}{n} + \frac{1}{2}d(n-1) = 1 + \frac{9}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}.$$

Die Lösung der Aufgabe wird im Papyrus Rhind folgendermaßen beschrieben:

Der mittlere Anteil beträgt 1 hekat	$\frac{s}{n} = \frac{10}{10} = 1$
Nimm 1 von 10 weg, der Rest ist 9	$n - 1 = 9$
Die Hälfte der gemeinsamen Differenz wird genommen, nämlich $\frac{1}{16}$ hekat	$\frac{d}{2} = \frac{1}{16}$
Multipliziere mit 9, das Ergebnis ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$	$\frac{d}{2}(n-1) = \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
Füge den mittleren Anteil dazu	$x = \frac{s}{n} + \frac{1}{2}d(n-1)$ $= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$
Nun musst du für jeden Mann $\frac{1}{8}$ hekat bis zum letzten Mann abziehen	Bilde $x - kd$ für $1 \leq k \leq 9$

2.4 Berechnung von Flächeninhalten und Volumina

- Die Fläche des Rechtecks wurde korrekt als Länge x Breite berechnet (Papyrus Rhind, Aufgabe 49)
- In Papyrus Rhind, Aufgabe 51 wird die Fläche eines Dreiecks so berechnet, dass die eine Seite halbiert wird (mit der Begründung: um es rechteckig zu machen). Handelt es sich dabei um ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten die Längen a und b haben, so handelt es sich um die (korrekte) Formel $A = a \cdot \frac{b}{2}$. Bei der Aufgabe befindet sich eine Skizze, bei der allerdings nicht klar ist, ob sie wirklich ein rechtwinkeliges Dreieck darstellt.
- Im Papyrus Rhind, Aufgabe 52 wird die Fläche eines Trapezes gemäß der (korrekten) Formel $A = h \cdot \frac{a+b}{2}$ berechnet (wieder: um es rechteckig zu machen), wobei h die Höhe und a und b die Längen der beide parallelen Seiten sind.

- Im Papyrus Rhind, Aufgabe 50 wird die Fläche eines Kreises mit Durchmesser d der Formel $A \approx (d - \frac{d}{9})^2$ gemäß berechnet, d.h.

$$A \approx d^2 \cdot (\tfrac{8}{9})^2 = (\tfrac{d}{2})^2 \cdot \tfrac{4 \cdot 64}{81} = (\tfrac{d}{2})^2 \cdot \tfrac{256}{81},$$

  was der modernen Berechnung mit der Approximation $\pi \approx \frac{256}{81}$ entspricht (für die $0 < \frac{256}{81} - \pi < 0{,}019$ gilt).

In einer wesentlich späteren Inschrift (aus dem 2. Jahrhundert v.Chr.) wird die Berechnung der Fläche eines Vierecks mit den Seiten a, b, c, d der (falschen) Formel $A \approx \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ gemäß durchgeführt. (Sie wird auch für Dreiecke verwendet, wobei $d = 0$ gesetzt bzw. weggelassen wird.) Das ist umso überraschender, als die griechisch-hellenistische Mathematik zu dieser Zeit bereits weit entwickelt war.

Die Berechnung der Volumina von Quadern und Zylindern wird im Papyrus Rhind in den Aufgaben 41 bis 46 beschrieben.

Im Moskauer Papyrus, Aufgabe 14 wird das Volumen eines Pyramidenstumpfs völlig korrekt der Formel $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$ gemäß berechnet. (Dabei bezeichnet h die Höhe des Pyramidenstumpfs und a und b die Seitenlängen der Quadrate, die die Grundfläche und die Deckfläche bilden.) Diese Formel kann man mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri folgendermaßen herleiten:

$$\int_0^h \left(a + \tfrac{b-a}{h}x\right)^2 dx = \cdots$$

$$\left(y = a + \tfrac{b-a}{h}x \;\Rightarrow\; dy = \tfrac{b-a}{h}dx \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{h}{b-a}dy\right)$$

$$\cdots = \tfrac{h}{b-a}\int_a^b y^2\,dy = \tfrac{h}{b-a}\tfrac{y^3}{3}\Big|_{y=a}^{b} = \tfrac{h}{3}\tfrac{b^3-a^3}{b-a} = \tfrac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Im Moskauer Papyrus, Aufgabe 10 wird die Fläche eines Korbs mit Öffnung d der Formel $A \approx 2(1 - \frac{1}{9})^2 d^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{256}{81} d^2$ gemäß berechnet.

Interpretiert man den Korb als Halbkugel mit Durchmesser d, so könnte es sich um die Berechnung der Oberfläche der Halbkugel handeln (die korrekt $A = \frac{1}{2}\pi d^2$ wäre), wobei die Näherung $\pi \approx \frac{256}{81}$ verwendet wurde.

Allerdings wurde diese Aufgabe auch anders interpretiert, nämlich als Berechnung der Mantelfläche eines Halbzylinders, bei dem die Höhe h und der Durchmesser d übereinstimmen (d.h. $d = h$). In diesem Fall wäre die Oberfläche korrekt $A = \frac{1}{2}\pi dh$.

2.5 Literatur

- M. Clagett, Ancient Egyptian Sciences. A Scource Book (Volume 3, Ancient Egyptian Mathematics)
- A. Imhausen, Mathematics in Ancient Egypt. A Contextual History
- V.J. Katz (ed.), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook (Chapter 1)
- D. Reimer, Count Like an Egyptian. A Hands-on Introduction to Ancient Mathematics