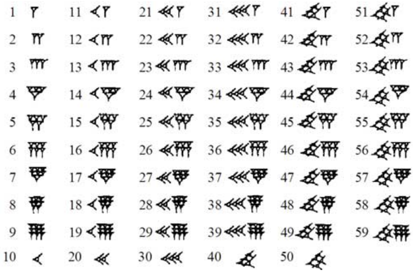
3. Mesopotamische Mathematik
3.1 Quellen und Grundlegendes

- Texte wurden in Mesopotamien in Keilschrift auf Tontafeln festgehalten. Dementsprechend gibt es eine deutlich größere Zahl erhaltener mathematischer Texte, die sich an verschiedenen Museen und Universitäten befinden.
- Ein großer Teil der Texte stammt aus dem Altbabylonischen Reich (circa 1900 – 1600 v.Chr.), weshalb man oft von babylonischer Mathematik spricht. (Nach dem Buch von E. Robson sind knapp 1000 Tontafeln mit mathematischem Inhalt bekannt, von denen circa 3/4 altbabylonisch sind.)
- Berechnungsmethoden wurden mit konkreten Zahlen beschrieben. Man kann allerdings Ansätze zu abstrakterem Denken erkennen. Wie bei den Ägyptern weiß man nicht, von wem die mathematischen Resultate stammen.

3.2 Zahldarstellung

- Verwendet wurde ein Sexagesimalsystem, d.h. ein Positionssystem mit der Basis 60.
- Genauer handelte es sich um eine Mischung aus Zehner- und Sechzigersystem, da keine 59 verschiedenen Symbole für die Ziffern von 1 bis 59 verwendet wurden.
- Verwendet wurde der Keil 𒁹 für 1 und der Winkelhaken 𒌋 für 10. Die Zahlen 1 bis 59 wurden (ab circa 2000 v.Ch.) mit diesen beiden Zeichen geschrieben:



- Größere Zahlen wurden durch Aneinanderreihen dieser Zahlen geschrieben.
- Ein Problem war dabei die Abgrenzung der Stellen voneinander, da es kein Zeichen für 0 gab. (Ein solches wurde erst sehr spät verwendet, nämlich zwei kleine schräg gestellte Winkelhaken.) Nicht besetzte Stellen wurden durch einen Abstand gekennzeichnet.
- Weiters gab es kein dem Komma vergleichbares Zeichen. Der Stellenwert musste aus dem Zusammenhang oder mit Hilfe beigefügter Erklärungen erkannt werden.
- Manchmal wurde auch eine subtraktive Schreibweise verwendet.

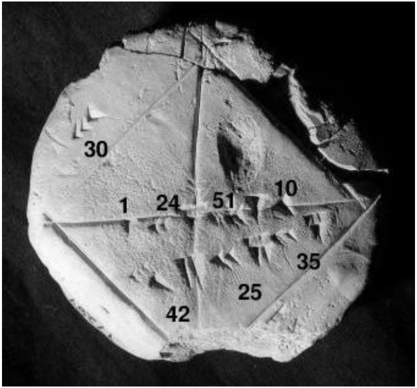
- Ein praktisches Problem beim Rechnen mit dem Sexagesimalsystem ist, dass man wesentlich mehr spezielle Wert auswendig kennen muss. (Unser 1 x 1 besteht aus $10^2 = 100$ Werten. Beim Sechzigersystem wären es $60^2 = 3600$ Werte, d.h. zu viele, um sie sich auswendig zu merken.)
- Darum wurden viele Tabellen verwendet, die auch Quadratzahlen, Reziprokwerte, Quadratwurzeln, Kubikwurzeln oder Werte der Gestalt $n^3 + n$ enthalten.
- Eine Tabelle mit Reziprokwerten (aus der Zeit der Seleukiden) am Louvre in Paris kann man z.B. unter `http://cartelfr.louvre.fr/cartelfr/visite?srv=car_not_frame&idNotice=24722&langue=fr` sehen.

- Die Reziprokwerte wurden auch benutzt, um Divisionen durchzuführen (d.h. man rechnete $m : n = m \cdot \frac{1}{n}$).
- Die Reziprokwerte $\frac{1}{n}$ konnten nur für Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit einer Primfaktorzerlegung der Gestalt $n = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ genau angegeben werden. (Da nur dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n \mid 60^k$ existiert, weil $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$.)
- Für andere n (z.B. $n = 7$) wird angegeben, dass der Wert nicht existiert bzw. ein Näherungswert verwendet.
- Bei einigen Aufgaben tauchen auch Divisionen $m : n$ auf, bei denen $n \mid m$ gilt (also z.B. $14 : 7$), die dann korrekt gelöst werden.

- Trotz aller Eigenschaften des Sexagesimalsystems, die wir als Nachteile sehen, war es sehr leistungsfähig und ermöglichte umfangreiche Berechnungen (z.B. in der Astronomie).
- Der hellenistische Mathematiker und Astronom Ptolemaios verwendete es im 2. Jahrhundert n.Chr., weil es wesentlich praktischer war als das griechische System.
- Auf diese Weise gelangte das Sexagesimalsystem nach Europa, wo es bis jetzt in gewissen Bereichen verwendet wird: Noch heute teilt man den Kreis in 360 Grad und ein Grad in 60 Minuten zu je 60 Sekunden. Ebenso teilt man die Stunde in 60 Minuten zu je 60 Sekunden.

- Für π wurden (implizit) die Näherungen $\pi \approx 3$ und $\pi \approx 3 + \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ verwendet. Dabei ist 3 eine wesentlich schlechtere Näherung als die altägyptische Näherung $\frac{256}{81}$, während $\frac{25}{8}$ eine etwas bessere Näherung ist: $\pi - 3 = 0,141\ldots$ und $\pi - \frac{25}{8} = 0,0165\ldots$ (während $\frac{256}{81} - \pi = 0,0189\ldots$)
- Beachte, dass
$$3 + \frac{1}{8} = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2}$$
eine endliche Darstellung im Sexagesimalsystem besitzt. Der erste Näherungsbruch $\frac{22}{7}$ der Kettenbruchentwicklung von π wäre eine bessere Näherung ($\frac{22}{7} - \pi = 0,00126\ldots$) und hätte einen kleineren Nenner, besitzt aber keine solche endliche Darstellung.

In der Yale Babylonian Collection findet man unter der Bezeichnung YBC 7289 eine altbabylonische Tontafel, die sehr gute Näherungen für $\sqrt{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ enthält:



Ein weiteres Bild findet man unter `http://babylonian-collection.yale.edu/highlights`.

Liest man die Kantenlänge des Quadrats (30) als $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, die Längenangabe bei der waagrechten Diagonale (1 24 51 10) als

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,4142129\ldots$$

und die Längenangabe darunter (42 25 35) als

$$\frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3} = 0,7071064\ldots,$$

so erhält man sehr genaue Näherungen für $\sqrt{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$: Es ist $\sqrt{2} = 1,4142135\ldots$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071067\ldots$, d.h.

$$\sqrt{2} - (1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}) \approx 6 \cdot 10^{-7}$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - (\frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3}) \approx 3 \cdot 10^{-7}.$$

Beachte, dass darin der Satz des Pythagoras verwendet wird – Jahrhunderte vor Pythagoras von Samos (circa 580 – 500 v.Chr.)!

Eine mögliche Erklärung, wie solche Näherungswerte gefunden wurden, wäre Intervallschachtelung. Eine andere wäre fortwährende Mittelbildung. Startet man z.B. mit dem Näherungswert $x_1 = 1$, so ist $x_1 < \sqrt{2}$ und $\frac{2}{x_1} = 2 > \sqrt{2}$. Bildet man $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{3}{2}$, so ist x_2 eine bessere Näherung als x_1, $x_2 > \sqrt{2}$ und $\frac{2}{x_2} < \sqrt{2}$. Bilde nun $x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = \frac{17}{12}$, usw.

D.h. bildet man rekursiv $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, so erhält man eine rasch konvergierende Folge $(x_n)_{n \geq 1}$. Weiß man, dass $\alpha = \lim x_n$ existiert, so muss $\alpha = \sqrt{2}$ sein, da

$$\alpha = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim x_n + \frac{2}{\lim x_n}) = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{2}{\alpha})$$

(und daher $\alpha^2 = 2$). Die Konvergenz gilt (für gutes x_1), weil es sich um einen Spezialfall des Newton-Verfahrens für die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ handelt. Es ist dann $f'(x) = 2x$ und daher

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

3.3 Lösung von Gleichungen und Gleichungsystemen

In Mesopotamien wurden außer linearen und quadratischen Gleichungen auch (spezielle) kubische Gleichungen und lineare und (spezielle) nichtlineare Gleichungssysteme (meist mit zwei Unbekannten) gelöst.

Beispiel für ein lineares Gleichungssystem (von einer Tontafel aus Susa):

Ein Viertel der Breite zur Länge addiert gibt 7 Handbreit	$\frac{1}{4}b + \ell = 7$
Länge und Breite addiert gibt 10 Handbreit	$b + \ell = 10$
Wieviel ist die Breite und die Länge?	
7 mal 4, des Viertels, ist 28	$b + 4\ell = 28$
10 von 28 ist 18	$3\ell = 18$
Das Reziproke von 3 ist $\frac{20}{60}$	$\frac{1}{3} = \frac{20}{60}$
$\frac{20}{60}$ mal 18 ist 6	$\ell = 6$
6 von 10 ist 4	$b = 4$

Beispiel für eine quadratische Gleichung, die auf eine Normalform zurückgeführt wird:

Ich bilde die Summe der Fläche, der Länge und der Breite und erhalte 1	$\ell b + \ell + b = 1$
3 mal die Länge und 4 mal die Breite, davon den 17. Teil habe ich zur Breite addiert und erhalte $\frac{30}{60}$	$\frac{1}{17}(3\ell + 4b) + b = \frac{30}{60} (= \frac{1}{2})$

Bemerkungen zur Angabe:

- $\frac{1}{17}$ hat keine (endliche) Darstellung im Sexagesimalsystem, der Autor hat aber vermutlich gewusst, dass die Lösung $\ell = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$, $b = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ ist.
- In der Beschreibung der zweiten Gleichung steht wörtlich und erhalte 30, allerdings müssen die beiden Gleichungen gemeinsam lösbar sein.

Im ersten Schritt der Lösung wird die zweite Gleichung mit 17 multipliziert, man erhält $3\ell + 21b = 8 + \frac{30}{60} (= \frac{17}{2})$.

Anschließend wird das Gleichungssystem (modern formuliert) auf die Normalform $x + y = \alpha$, $xy = \beta$ gebracht. (Der Vietasche Wurzelsatz implizert, dass x, y dann Lösungen der quadratischen Gleichung $T^2 - \alpha T + \beta = 0$ sind und daher die Werte $\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}$ haben.

Hier wird $x = 21(b + 1)$, $y = 3(\ell + 1)$ verwendet und $(x + y =) 21b + 21 + 3\ell + 3 = 32 + \frac{30}{60} (= \alpha)$ und $(xy =) 3 \cdot 21 \cdot (\ell b + \ell + b + 1) = 3 \cdot 21 \cdot 2 = 2 \cdot 60 + 6 (= 126 = \beta)$ gerechnet.

Die Gleichung wird mit Hilfe der folgenden Identität gelöst: $(\frac{\alpha}{2})^2 = (\frac{x+y}{2})^2 = (\frac{x-y}{2})^2 + xy = (\frac{x-y}{2})^2 + \beta$, woraus $(\frac{x-y}{2})^2 = (\frac{\alpha}{2})^2 - \beta$ und $\frac{x-y}{2} = \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta}$ gefolgert wird.

Teile die Summe $32+\frac{30}{60}$ durch 2, du findest $16+\frac{15}{60}$	$\frac{\alpha}{2}=\frac{x+y}{2}=16+\frac{15}{60}$
Quadriere dies, du findest $4\cdot 60+24+\frac{3}{60}+\frac{45}{60^2}$	$(\frac{\alpha}{2})^2=(\frac{x+y}{2})^2$ $=4\cdot 60+24+\frac{3}{60}+\frac{45}{60^2}$
Ziehe davon $2\cdot 60+6$ ab, du findest $2\cdot 60+18+\frac{3}{60}+\frac{45}{60^2}$	$(\frac{\alpha}{2})^2-\beta=(\frac{x+y}{2})^2-xy=$ $(\frac{x-y}{2})^2=2\cdot 60+18+\frac{3}{60}+\frac{45}{60^2}$
Was ist die Quadratwurzel davon? $11+\frac{45}{60}$ ist die Wurzel	$\sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2-\beta}=\frac{x-y}{2}=11+\frac{45}{60}$
Addiere $11+\frac{45}{60}$ zu $16+\frac{15}{60}$ du findest 28	$x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ $=\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}=28$
Subtrahiere $11+\frac{45}{60}$ von $16+\frac{15}{60}$ du findest $4+\frac{3}{60}$	$y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$ $=\frac{\alpha}{2}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}-\beta}=4+\frac{3}{60}$

Daraus wird abschließend $\ell+1=\frac{y}{3}=1+\frac{30}{60}$ und $b+1=\frac{x}{21}=1+\frac{20}{60}$ berechnet ($\Longrightarrow \ell=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$, $b=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$).

Eine andere Aufgabe, die auf dieselbe Normalform zurückgeführt wird: Länge und Breite habe ich multipliziert und so die Fläche bestimmt, wiederum, was die Länge über die Breite hinausgeht zur Fläche habe ich addiert und $3 \cdot 60 + 3$ erhalten. Wiederum Länge und Breite addiert gibt 27. Was ist Länge, Breite und Fläche?

Zu lösen ist also das Gleichungssystem $\ell b + \ell - b = 183$ und $\ell + b = 27$. Um die Normalform $x + y = \alpha$, $xy = \beta$ zu erhalten, wird folgendermaßen vorgegangen:

27, die Summe von Länge und Breite, zu $3 \cdot 60 + 3$ addiere. Es gibt $3 \cdot 60 + 30$	$(\ell b + \ell - b) + (\ell + b) = \ell b + 2\ell = \ell(b+2) = 210$
2 zu 27 addiere. Es gibt 29	$\ell + (b+2) = 29$

Setzt man $x = \ell$, $y = b + 2$, so erhält man wieder die Normalform $x + y = \alpha (= 29)$ und $xy = \beta (= 210)$. Im restlichen Text wird $x = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta} = 15$ und $y = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{(\frac{\alpha}{2})^2 - \beta} = 14$ (und daraus $\ell = 15$, $b = 12$ und $\ell \cdot b = 3 \cdot 60 = 180$) berechnet.

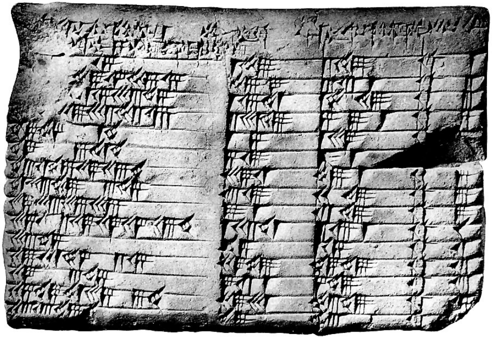
Beispiel für das Auftreten kubischer Gleichungen:

Es gibt Tontafeln, auf denen Aufgaben betrachtet werden, in denen Querschnitt plus Volumen auftritt, d.h. $\ell b + \ell bh$, wobei ℓ, b und h die Länge, Breite und Höhe bezeichnen. Durch Nebenbedingungen erhält man ein Gleichungssystem, das durch Transformation auf eine Gleichung vom Grad ≤ 3 zurückgeführt werden oder durch Kunstgriffe gelöst werden kann (insbesondere durch die Verwendung von Tabellen).

In einer Aufgabe heißt es etwa: Querschnitt und Volumen sollst Du addieren, es ist $1 + \frac{10}{60}$, d.h. $\ell b + \ell bh = 1 + \frac{10}{60} (= \frac{7}{6})$. Als Nebenbedingungen wird $b = \frac{2}{3}\ell$ und $h = 12\ell$ angegeben. Daraus ergibt sich die Gleichung $\ell \cdot \frac{2}{3}\ell + \ell \cdot \frac{2}{3}\ell \cdot 12\ell = \frac{7}{6}$ bzw. nach Multiplikation mit $12 \cdot 18$ die Gleichung $(12\ell)^3 + (12\ell)^2 = 4 \cdot 60 + 12 (= 252)$. Aus einer Tabelle für die Werte von $n^3 + n^2$ wird dann $12\ell = 6$ (und daher $\ell = \frac{1}{2}$) abgelesen.

3.4 Plimpton 322

Plimpton 322 ist eine etwa 13 cm x 9 cm große Tontafel, die um 1800 v.Chr. im heutigen Südirak entstanden sein dürfte. Sie befindet sich an der Columbia University.



Ein weiteres Bild findet man unter `https://exhibitions.library.columbia.edu/exhibits/show/jewels/item/10987`.

Auf der Tafel sind in vier Spalten Zahlen eingetragen. Die Überschriften der zweiten, dritten und vierten Spalte lauten:

- Quadratseite der kurzen Seite
- Quadratseite der Diagonale
- Name

Die Überschrift der ersten Spalte ist lesbar, aber schwieriger zu übersetzen.

In der vierten Spalte werden die Zeilen von 1 bis 15 durchnummeriert (und wir kümmern uns nicht weiter um sie).

Die Tontafel ist an der linken Seite abgebrochen und es wird oft argumentiert, dass am Beginn der ersten Spalte bei jeder Zahl die Ziffer 1 oder eine Spalte fehlt (oder sogar mehrere). Folgt man dieser Argumentation, so muss man die nachfolgenden Rechnungen entsprechend modifizieren.

Nach einer klassischen Interpretation von Plimpton 322 (von O. Neugebauer) handelt es sich dabei um eine Tabelle pythagorischer Tripel (wobei eine der drei Zahlen nur implizit gegeben ist).

Bezeichnet man die Werte in der zweiten und dritten Spalte mit k bzw. d (mit $k, d \in \mathbb{N}$), so ist der Wert in der ersten Spalte (meistens)

$$\frac{k^2}{d^2 - k^2},$$

wobei $d^2 - k^2 = \ell^2$ für ein $\ell \in \mathbb{N}$. D.h. (k, ℓ, d) bilden ein pythagoreisches Tripel, z.B. $(119, 120, 169)$ in der ersten Zeile. (Die Zeilen, in denen diese Beziehung nicht erfüllt ist, werden normalerweise als Fehler des Schreibers interpretiert.)

Einige dieser Tripel sind recht groß, z.B. $(12709, 13500, 18541)$ in der vierten Zeile. In der elften Zeile findet man das Tripel $(45, 60, 75) = 15(3, 4, 5)$, d.h. ein Vielfaches des bekannten Tripels $(3, 4, 5)$ (das selber nicht auftritt).

Man findet (für die meisten Zeilen) $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a > b$, derart dass $k = a^2 - b^2$ und $d = a^2 + b^2$. Daraus ergibt sich

$$\ell^2 = d^2 - k^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2 b^2 = (2ab)^2$$

(was einer bekannten Parametrisierung der pythagoreischen Tripel entspricht). Die ersten drei Spalten von Plimpton 322 können dann als

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{2ab}\right)^2, a^2 - b^2, a^2 + b^2$$

geschrieben werden.

Setzt man in der Gleichung $2^2 + (x - \frac{1}{x})^2 = (x + \frac{1}{x})^2$ (hier mit $x \in \mathbb{Q}^+$) als Wert $x = \frac{a}{b}$, so erhält man

$$ab(x - \tfrac{1}{x}) = a^2 - b^2 = k \quad \text{und} \quad ab(x + \tfrac{1}{x}) = a^2 + b^2 = d$$

und die ersten drei Spalten von Plimpton 322 werden zu

$$\left(\tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{x})\right)^2, ab(x - \tfrac{1}{x}), ab(x + \tfrac{1}{x}).$$

Es gibt eine umfangreiche Literatur zu Plimpton 322, in der verschiedene Interpretationen und verschiedene Theorien über die Berechnung der Eintragungen beschrieben werden (z.B. ihre Berechnung mit Hilfe von passend gewählten Parametern a und b bzw. eines Parameter x wie oben dargestellt).

Eine andere Interpretation ist die als trigonometrische Tabelle: Bezeichnen d und k die Länge der Hypothenuse und der Gegenkathete in einem rechtwinkligen Dreieck (bezogen auf einen Winkel α im Dreieck), so ist die Eintragung in der ersten Spalte $(\frac{k}{\ell})^2 = \tan^2 \alpha$. Berechnet man die Winkeln für die verschiedene Zeilen, so variieren sie zwischen circa 45° (in der ersten Zeile) und circa 31° (in der letzten Zeile) und nehmen in Schritten von etwa 1° ab.

Es gibt keinen Grund zu glauben, dass zum Zeitpunkt der Entstehung von Plimpton 322 bereits entsprechende Begriffe verwendet wurden und diese Interpretation wird heutzutage meist abgelehnt. Allerdings wurde sie vor kurzem wieder aufgegriffen.

Eine neuere Interpretation ist die einer Tabelle zur Erstellung von Aufgaben der folgenden Gestalt: Bei bekanntem $c (\in \mathbb{Q}^+)$ sollen für die Gleichung $x - \frac{1}{x} = c$ (d.h. $x^2 - cx - 1 = 0$) die Werte von x und $\frac{1}{x}$ bestimmt werden. Hintergrund ist die folgende Rechnung:

$$\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{x}\right)\right)^2 = \tfrac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{x}\right)\right)^2 = 1 + \left(\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{x}\right)\right)^2 = \tfrac{c^2}{4} + 1$$

somit (da alles positiv ist) $\quad \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{x}\right) = \sqrt{\tfrac{c^2}{4} + 1}$

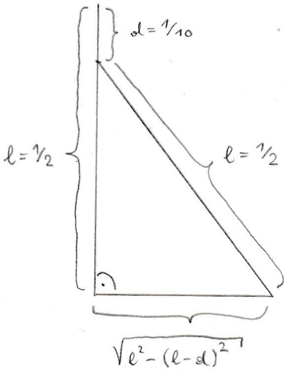
$$\Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{x}\right) = \tfrac{c}{2} + \sqrt{\tfrac{c^2}{4} + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\left(x + \tfrac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{x}\right) = -\tfrac{c}{2} + \sqrt{\tfrac{c^2}{4} + 1}$$

die den damals verwendeten Lösungsweg für solche Probleme beschreibt. Dabei wird angenommen, dass am linken Rand von Plimpton 322 zwei oder drei Spalten abgebrochen sind.

3.5 Berechnung geometrischer Größen

In einem altbabylonischen Text findet man die folgende Aufgabe, für deren Lösung der Satz des Pythagoras verwendet wird: Ein Balken der Länge $(\ell =)\frac{30}{60}(=\frac{1}{2})$ ist um $(d =)\frac{6}{60}(=\frac{1}{10})$ herabgerutscht. Wie weit hat sich das untere Ende entfernt?



30 quadriere, du erhältst 15	$\ell^2 = \frac{15}{60} (= \frac{1}{4})$
zieh 6 von 30 ab, du erhältst 24	$\ell - d = \frac{24}{60} (= \frac{2}{5})$
quadriere 24, du erhältst 9 36	$(\ell - d)^2 = \frac{9}{60} + \frac{36}{60^2} (= \frac{4}{25})$
zieh 9 36 von 15 ab, du erhältst 5 24	$\ell^2 - (\ell - d)^2 = \frac{5}{60} + \frac{24}{60^2}$ $(= \frac{9}{100})$
5 24 hat die Quadratwurzel 18	$\sqrt{\ell^2 - (\ell - d)^2} = \frac{18}{60} (= \frac{3}{10})$
Er hat sich am Boden 18 entfernt.	

Man findet auch Varianten der Aufgabe: Gegeben sind die Balkenlänge und der Abstand am Boden. Gesucht ist, wie weit er herabgerutscht ist. Bzw. gegeben ist die Rutschhöhe und der Abstand von der Wand. Gesucht ist die Balkenlänge.

In der obigen Aufgabe wurden die Zahlenwerte einfach gewählt. Konnte die Wurzel nicht so glatt gezogen werden, wurde sie approximiert. Z.B. findet man die Aufgabe, die Diagonale d eines Tores mit Höhe $h = 40$ und Breite $b = 10$ zu berechnen, d.h. $d = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{1600 + 100} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17} = 41,231\ldots$. Für die Lösungswert wird die Näherung

$$d \approx h + \tfrac{b^2}{2h} = 40 + \tfrac{100}{80} = 40 + \tfrac{5}{4} = 41 + \tfrac{1}{4}(= 41 + \tfrac{15}{60}) = 41,25$$

verwendet, die man folgendermaßen begründen kann: Gesucht sei $\sqrt{z}$ (mit $z \in \mathbb{N}$). Wähle $a \in \mathbb{N}$ mit $a^2 \leq z < (a+1)^2$. Dann ist $z = a^2 + r$ mit $0 \leq r = z - a^2 < (a+1)^2 - a^2 = 2a + 1$, d.h. $0 \leq r \leq 2a$. Verwendet man $x_1 = a$ im oben beschriebenen babylonischen Wurzelziehen, so ist

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\left(x_1 + \tfrac{z}{x_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(a + \tfrac{a^2+r}{a}\right) = a + \tfrac{r}{2a}$$

eine bessere Näherung für $\sqrt{z}$ als a.

Man kann auch folgendermaßen argumentieren: Verwendet man die Newtonsche Binomialreihe

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots \text{ (für } |x| < 1)$$

mit $\alpha = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{r}{a^2}$, so erhält man

$$\sqrt{1+\frac{r}{a^2}} = 1 + \binom{1/2}{1}\frac{r}{a^2} + \cdots = 1 + \frac{r}{2a^2} + \cdots \text{ (für } r \leq a^2)$$

und daher

$$\sqrt{z} = \sqrt{a^2+r} = a\sqrt{1+\frac{r}{a^2}} = a + \frac{r}{2a} + \cdots .$$

Ist $\frac{r}{a^2}$ klein, so ist $\sqrt{z} \approx a + \frac{r}{2a}$ also tatsächlich eine gute Näherung.

Man findet allerdings auch andere Approximationen für Quadratwurzeln.

Die Berechnung des Flächeninhalts von Rechtecken und Dreiecken wurde beherrscht. Die Fläche des Trapezes wurde der Formel $\frac{a+c}{2}h$ gemäß (korrekt) berechnet, aber auch die (falsche) Formel $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ für die Fläche des beliebigen Vierecks mit Kantenlängen a, b, c, d tritt vereinzelt auf.

Beim Flächeninhalt des Kreises ging man (für uns überraschend) nicht vom Durchmesser, sondern vom Umfang U aus. Wir definieren üblicherweise π so, dass $U = 2r\pi$ und leiten daraus $A = r^2\pi$ ab. Es gilt dann aber natürlich auch $A = \frac{(2r\pi)^2}{4\pi} = \frac{U^2}{4\pi}$.

Tatsächlich wird in Tabellen 5 als Konstante des Kreises bezeichnet. Rechnet man $A \approx U^2 \cdot \frac{5}{60} = \frac{U^2}{12} = \frac{U^2}{4 \cdot 3}$, so erhält man die obige Formel mit der Näherung $\pi \approx 3$.

Die altbabylonische Tontafel YBC 7302 enthält die Beschriftungen für $U = 3$, $U^2 = 9$ und $A \approx \frac{9}{12} = \frac{45}{60}$, siehe `http://cdli.ucla.edu/dl/photo/P255051.jpg`.

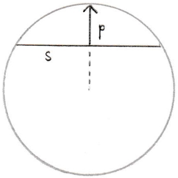
In Konstantentabellen findet man 57 36 als Konstante des verbesserten Kreises. Fasst man das als Korrekturfaktor $\frac{57}{60}+\frac{36}{60^2}$ auf, so erhält man

$$A \approx \frac{U^2}{12}\cdot\left(\frac{57}{60}+\frac{36}{60^2}\right) = \frac{U^2}{12}\cdot\frac{24}{25} = U^2\Big/\frac{25}{2} = U^2\Big/\left(4\cdot\frac{25}{8}\right),$$

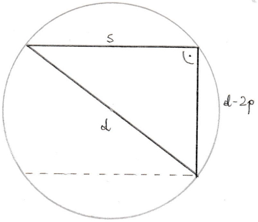
d.h. obige Formel mit $\pi \approx \frac{25}{8} = 3+\frac{1}{8}$.

Als Konstante des Durchmessers (bzw. Radius) des Kreises wurden 20 (bzw. 10) angegeben. Es ist $2r = \frac{U}{\pi}$ (bzw. $r = \frac{U}{2\pi}$). Rechnet man $2r \approx U\cdot\frac{20}{60} = \frac{U}{3}$ (bzw. $r \approx U\cdot\frac{10}{60} = \frac{U}{6} = \frac{U}{2\cdot 3}$), so erhält man die obigen Formeln für Durchmesser (bzw. Radius) mit $\pi \approx 3$.

In der altbabylonischen Mathematik wurden auch Kreissegmente mit Sehne s und Pfeil p behandelt.



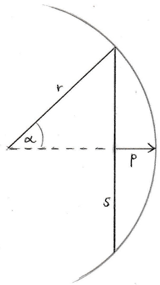
Dabei gilt die Relation $s^2 + (d-2p)^2 = d^2$ (wobei d den Durchmesser bezeichnet).



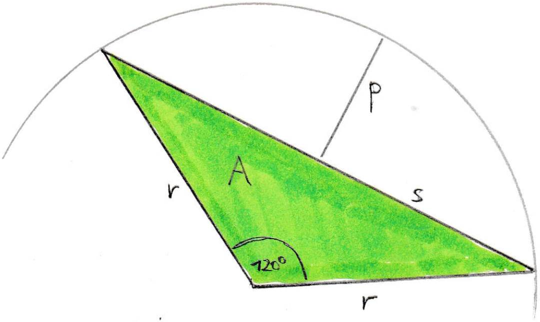
Daraus folgen sofort

$$s = \sqrt{d^2 - (d - 2p)^2} \quad \text{und} \quad p = \tfrac{1}{2}\big(d - \sqrt{d^2 - s^2}\big).$$

Heute würden wir bei einer vergleichbaren Frage Winkelfunktionen verwenden, d.h. $s = 2r \sin\alpha$ und $p = r - r\cos\alpha = r(1 - \cos\alpha)$.



Z.B. wird in Konstantentabellen 6 33 45 als Konstante des Drittelkreises angegeben, 52 30 als Konstante seiner Sehne und 15 als die seines Pfeils.



Besitzt der Kreis Radius r (und daher der Drittelkreis Bogenlänge $\frac{2r\pi}{3}$), so ist die Sehne s (nach dem Kosinussatz) gegeben durch

$$s^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos \tfrac{2\pi}{3} = 2r^2 - 2r^2 \cdot (-\tfrac{1}{2}) = 3r^2$$

und daher $s = \sqrt{3}r$. Der Pfeil p ist

$$p = \tfrac{1}{2}\big(2r - \sqrt{4r^2 - 3r^2}\big) = \tfrac{1}{2}(2r - r) = \tfrac{r}{2}$$

und die Fläche A des im Zentriwinkel enthaltenen Dreiecks ist

$$A = \tfrac{1}{2}s(r - p) = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3}r \cdot \tfrac{r}{2} = \tfrac{\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Setzt man diese Größen in Relation zur Bogenlänge, so erhält man:

- $s = \sqrt{3}r = c_s \cdot \frac{2r\pi}{3}$ mit

$$c_s = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\ldots \text{ und } \frac{52}{60} + \frac{30}{60^2} = 0,875$$

  wenn man $\pi \approx 3$ verwendet.
- $p = \frac{r}{2} = c_p \cdot \frac{2r\pi}{3}$ mit $c_p = \frac{3}{4\pi} \approx \frac{1}{4} = \frac{15}{60}$ (wieder mit $\pi \approx 3$)
- $A = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = c_A \cdot (\frac{2r\pi}{3})^2$ mit

$$c_A = \frac{9\sqrt{3}}{16\pi^2} \approx \frac{\sqrt{3}}{16} = 0,108\ldots \text{ und } \frac{6}{60} + \frac{33}{60^2} + \frac{45}{60^3} = 0,109\ldots$$

  (mit $\pi^2 \approx 9$)

In Konstantentabellen wird 52 30 als Konstante des Dreiecks genannt. In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a hat die Höhe die Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Es ist $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866\ldots$ und $\frac{52}{60} + \frac{30}{60^2} = 0,875$.

Auf einer Tontafel im Louvre findet man die Skizze eines regelmäßigen Sechsecks, das in sechs gleichseitige Dreiecke aufgeteilt ist, siehe `http://cartelfr.louvre.fr/cartelfr/visite?srv=car_not_frame&idNotice=24721&langue=fr`. (Auf der anderen Seite derselben Tontafel befindet sich ein regelmäßiges Siebeneck.)

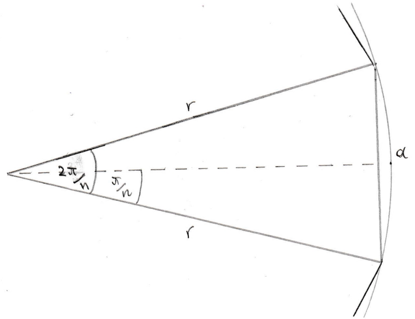
Dabei sind zwei Seiten eines Dreiecks mit 30 und sein Inneres mit 6 33 45 beschriftet. Die Fläche A eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Für $a = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$ ist also

$$A = \frac{\sqrt{3}}{16} = 0,108\ldots \text{ und } \frac{6}{60} + \frac{33}{60^2} + \frac{45}{60^3} = 0,109\ldots$$

Als Konstante der Diagonale des Quadrats ist 1 25 angegeben. (In einem Quadrat mit Seitenlänge a hat die Diagonale die Länge $\sqrt{2}a$. Es ist $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ und $1 + \frac{25}{60} = 1,416\ldots$.)

Weiters findet man 1 40 (bzw. 2 37 30 bzw. 3 41) als Konstante des Fünfecks (bzw. Sechsecks bzw. Siebenecks).

In einem regelmäßigen n-Eck mit Umkreisradius r und Seitenlänge a ist $a = 2r\sin\frac{\pi}{n}$.



Bezeichnet A den Flächeninhalt des n-Ecks, so gilt

$$\tfrac{A}{n} = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot r \cos \tfrac{\pi}{n} = \frac{a}{2} \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cos \tfrac{\pi}{n} = \tfrac{a^2}{4} \cot \tfrac{\pi}{n}$$

und daher

$$A = \frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{n} \cdot a^2.$$

n	$\frac{n}{4} \cot \frac{\pi}{n}$	Zahl aus Konstantentabelle
5	$1,720\ldots$	$1 + \frac{40}{60} = \frac{5}{3} = 1,666\ldots$
6	$2,598\ldots$	$2 + \frac{37}{60} + \frac{30}{60^2} = 2,625$
7	$3,633\ldots$	$3 + \frac{41}{60} = 3,683\ldots$

Berechnung von Volumina

- Die Volumina von Quadern, senkrechten Prismen und Zylindern konnten berechnet werden.
- Man findet viele Berechnungen für Kanäle und Belagerungsdämme, Ausschachtungen und Aufschüttungen.
- Z.B. sind für einen Kanal mit trapezförmigen Querschnitt die obere und untere Breite und die Tiefe sowie die Arbeitsleistung eines Arbeiters gegeben. Gesucht ist die Länge des Kanals, den er gräbt. Alternativ kann z.B. auch Querschnitt, Länge, Anzahl und Tagesleistung der Arbeiter gegeben sein und die Anzahl der Arbeitstage gefragt sein. Auch der Tageslohn der Arbeiter kann angegeben sein und die Kosten müssen berechnet werden.

Die Berechnung des Volumens V eines Fundaments in Form eines Kegelstumpfs wurde der Formel

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{U_1^2}{12} + \frac{U_2^2}{12}\Big) \cdot h$$

gemäß vorgenommen. Dabei bezeichnen U_1 und U_2 den oberen und unteren Umfang und h die Höhe des Kegelstumpfes. D.h. verwendet wurde die (falsche) Formel $\frac{A_1+A_2}{2} \cdot h$ wobei A_1 und A_2 die Flächeninhalte von Grundfläche und Deckfläche bezeichnen und h die Höhe des Kegelstumpfes ist. Korrekt wäre

$$V = \tfrac{h}{3}\big(A_1 + \sqrt{A_1 \cdot A_2} + A_2\big).$$

Dasselbe (falsche) Verfahren wurde für das Volumen des Pyramidenstumpfes verwendet, d.h. es wurde $\frac{h}{2}(a^2 + b^2)$ berechnet, wobei a und b die Kantenlängen der beiden Quadrate und h die Höhe des Pyramidenstumpfes bezeichnen.

3.6 Literatur

- V.J. Katz (ed.), The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook (Chapter 2)
- E. Robson, Mathematics in Ancient Iraq. A Social History

(Ein paar) Artikel zu Plimpton 322:

- R.C. Buck, Sherlock Holmes in Babylon, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), 335 – 345
- D.F. Mansfield, N.J. Wildberger, Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, *Hist. Math.* **44** (2017), 395 – 419
- E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322, *Hist. Math.* **28** (2001), 167 – 206
- E. Robson, New light on Plimpton 322, *Amer. Math. Monthly* **109** (2002), 105 – 120