4. Griechisch – hellenistische Mathematik
4.1 Überblick

Die griechische Mathematik der Antike unterscheidet sich wesentlich von der der Ägypter und Mesopotamier: Es steht nicht mehr die Frage nach dem *Wie* im Vordergrund, sondern nach dem *Warum*. Man begnügt sich nicht damit, einen Weg zur hinreichend genauen Berechnung zu kennen, sondern bemüht sich um Beweise für alle Behauptungen. Mathematische Fragen werden um ihrer selbst willen studiert. (Angewandte Mathematik findet sich dagegen viel seltener, da sie mit körperlicher Arbeit assoziert wurde, die weniger Ansehen genoss.) Über die verschiedenen Autoren und ihre wissenschaftlichen Leistungen ist vieles bekannt. Für die Forschung wurde die deduktive Methode entwickelt (die wir im wesentlichen noch heute benützen). Die Regeln und Vorschriften der Ägypter und Mesopotamier wurden systematisiert und zu Theoriegebäuden zusammengefasst, die weiter ausgebaut wurden.

Meist unterscheidet man die folgenden vier Entwicklungsperioden:

1. Ionische Periode (circa 600 – 450 v.Chr.) Nach dem Untergang der mykenischen Kultur kam es zu Wanderbewegungen in Griechenland, im Zuge derer die griechischen Inseln und das kleinasiatische Küstenland besiedelt wurden. Es bildeten sich Stadtstaaten. Die Mathematik als selbständige Wissenschaft entstand als Teil der ionischen Naturphilosophie. Man versuchte, die Welt ausgehend von einfachen geometrischen Sachverhalten und Verhältnissen zwischen Zahlen zu erklären. Die Irrationalzahlen wurden entdeckt. Bekannte Mathematiker, die dieser Periode zuzurechnen sind, sind: Thales von Milet (nach dem der Thaleskreis benannt ist), Hippokrates von Chios (der die Möndchen des Hippokrates behandelte) und Pythagoras von Samos (nach dem der Satz des Pythagoras benannt ist). In der Schule der Eleaten wurden die Anfänge der Logik entwickelt. (Bekannt ist z.B. Zenon von Elea und sein Paradoxon vom Wettlauf von Achilles und der Schildkröte.)

2. Athenische Periode (circa 450 – 300 v.Chr.) Im 5. und 4. Jahrhundert eroberte sich Athen eine führende Stellung unter den griechischen Stadtstaaten, wurde zum Zentrum der Wissenschaft und erlebte unter Perikles eine Zeit kultureller Hochblüte. In der Philosophenschule Platons, der Akademie, wurde das Idealbild der Mathematik als rein deduktiv herleitbare Wissenschaft ausgebildet, das die Entwicklung der Mathematik bis heute prägt (wie etwa mathematische Theorien ohne Anwendungsbezug und ohne Zuhilfenahme mechanischer Vorstellungen und Geräte). Eine zentrale Frage war die nach dem Umgang mit den Irrationalzahlen. Nach einer Theorie zog man sich als Ausweg auf die weiter entwickelte Geometrie zurück (geometrische Algebra). Wahrscheinlich bedeutendster Mathematiker war Eudoxos von Knidos, dessen Proportionenlehre rationale und irrationale Verhältnisse umfasste. Er führe das Exhaustionsverfahren ein, bei dem krummlinig begrenzte Flächen durch Polygone beliebig genau approximiert werden, um den Flächeninhalt zu bestimmen (und analog Volumina).

3. Hellenistische (oder alexandrinische) Periode (circa 300 v.Chr. – 150 n.Chr.) Nach dem Tod seines Vaters eroberte der makedonische König Alexander III (der Große) in kurzer Zeit ein riesiges Reich (das außer Griechenland unter anderem auch Ägypten und Mesopotamien umfasste). Von seinem Lehrer Aristoteles hatte Alexander eine Neigung zur griechischen Kultur übernommen. In Folge dessen wurde die griechische Kultur in seinem Reich in den herrschenden Kreisen zur Mode und verschmolz teilweise mit den östlichen Kulturen. So entstand die hellenistische Kultur und Wissenschaft. In Ägypten wurde 331 v.Chr. Alexandria gegründet, das zum wissenschaftlichen und kulturellen Zentrum der hellenistischen Welt wurde. Die Ptolemäer (Herrscher Ägyptens nach dem Zerfall des Alexanderreichs) gründeten mit dem Museion (Sitz der Musen) dort das erste Forschungsinstitut. Ein wesentlicher Teil davon war die Bibliothek mit vielen Tausend Papyrusrollen, die systematisch zusammengetragen und kopiert wurden.

In der hellenistischen Periode erreichte die griechische Mathematik den Höhepunkt ihrer Entwicklung. Bekannte Mathematiker dieser Periode waren:

- Euklid, nach dem z.B. der euklidische Algorithmus benannt ist. Er schuf mit seinen *Elementen* eines der bekanntesten und einflussreichsten mathematischen Lehrbücher aller Zeiten.
- Archimedes, der einer der bedeutendsten Mathematiker und Physiker der Antike war.
- Eratosthenes von Kyrene, nach dem das Sieb des Eratosthenes benannt ist.
- Apollonius von Perge, der sich mit Kegelschnitten beschäftigte und durch den die Bezeichnungen Ellipse, Parabel und Hyperbel ihre moderne Bedeutung erhalten haben.

4. Spätantike Nach dem Sieg Roms über Karthago in den Punischen Kriegen war es zur dominanten Macht im Mittelmeerraum aufgestiegen. Obwohl Griechenland 146 v.Chr. und Ägypten 30 v.Chr. römische Provinz wurden, blieb Griechisch die Sprache der Wissenschaft im römischen Reich.

Mit der Auflösung des (west)römischen Reichs während der Völkerwanderung kam es auch zu einem Niedergang der Wissenschaften. Die Gelehrten verwendeten ihre Kraft oft darauf, frühere Ergebnisse zu verstehen und zusammenzufassen. Das Christentum wurde ab 313 n.Chr. geduldet und ab 380 n.Chr. Staatsreligion im Römischen Reich. In Folge wurden zahlreiche Lehrstätten und Akademien als *Stätten heidnischer und verderbter Lehren* geschlossen und Lehrende verfolgt. Im byzantinischen bzw. oströmischen Reich hielt sich die griechisch – hellenistische Kultur noch längere Zeit.

Bekannte Mathematiker der Spätantike sind:

- Heron von Alexandria, nach dem die Formel $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ für den Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen a, b, c benannt ist, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$,
- Diophantos von Alexandria, nach dem die diophantischen Gleichungen benannt sind,
- Pappos von Alexandria, der den Satz von Pappos aus der projektiven Geometrie fand,
- Hypatia – die erste namentlich bekannte Mathematikerin. (Als diese wird allerdings manchmal auch die Pythagoreerin Theano genannt.) Sie wurde 415 n.Chr. von christlichen Fanatikern ermordet.

Quellen

- Aus den frühen Entwicklungsperioden der griechischen Mathematik sind keine Schriften erhalten geblieben.
- Allerdings findet man zahlreiche mathematisch-historische Bemerkungen in den Schriften späterer Autoren (die zum Teil erst im 5. und 6. Jahrhundert – also wesentlich später – gelebt haben).
- Die Philosophen Platon und Aristoteles zitieren öfter mathematische Resultate und Beweise.
- Eine wichtige Quelle für die frühen Entwicklungsperioden ist die Geschichte der Geometrie des Eudemos von Rhodos (um 300 v.Chr.), die nicht erhalten geblieben ist, allerdings von vielen späteren Autoren zitiert wurde.

- Von den Elementen des Euklid sind vollständige Abschriften erhalten geblieben. Da es sich dabei um eine Zusammenstellung damals bekannter grundlegender Resultate handelt, kann man von ihrem Inhalt bis zu einem gewissen Grad auf die frühere Entwicklung Rückschlüsse ziehen.
- Eines der ältesten erhaltenen Fragmente einer Abschrift der Elemente des Euklid (circa aus dem Jahr 100 n.Chr.) an der University of Pennsylvania findet man unter `http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/papyrus/papyrus.html`.
- Die Werke anderer späterer Mathematiker (wie Archimedes, Apollonius, Diophantos oder Pappos) sind unvollständig bzw. teilweise in arabischer Übersetzung erhalten geblieben.

Für die Überlieferung wichtige antike Autoren sind unter anderem:

- Geminos von Rhodos (1. Jhd.v.Chr.) schrieb eine Art mathematische Enzyklopädie, die nicht erhalten ist, aber von anderen Autoren (wie z.B. Proklos) zitiert wird.
- Nikomachus von Gerasa (um 100 n.Chr.) schrieb eine Arithmetik, die pythagoreisches Gedankengut enthält. Sie wurde ins Lateinische übersetzt und war eine der Grundlagen des mittelalterlichen Universitätsunterrichts in Arithmetik.
- Iamblichos (um 300 n.Chr.) schrieb eine Art Enzyklopädie der pythagoreischen Lehre.
- Pappos von Alexandria (um 300 n.Chr.) verfasste die achtbändige *Collectio*, in der er ältere Ergebnisse zusammenstellte, kommentierte und ergänzte. Teile von Buch II und die Bücher III bis VIII sind erhalten und eine wichtige Quelle.

- Theon von Alexandria (4. Jhd.n.Chr.) war Vater von Hypatia und Herausgeber der Elemente des Euklid. Auf die von ihm redigierte Version gehen fast alle bekannten Abschriften zurück.

- Proklus Diadochus (5. Jhd.n.Chr.) war Leiter der Platonischen Akademie in Athen. Er schrieb (unter anderem) einen Kommentar zu Buch I von Euklids Elementen, der (gestützt auf Eudemos und Geminos) viele mathematisch-historische Informationen enthält. Zu seinen Schülern zählt Ammonios, der seinerseits Lehrer von Eutokios und Simplikios war.

- Eutokios von Askalon (um 500 n.Chr.) war Schüler von Ammonios und wirkte in Byzanz. Er schrieb Kommentare zu Werken von Archimedes (Kugel und Zylinder, Kreismessung, Gleichgewicht ebener Flächen) und Appolonius (Bücher I bis IV seines Werks über Kegelschnitte). Der Kommentar zu *Kugel und Zylinder* enthält 12 Lösungsmethoden für die Würfelverdoppelung mit Angabe ihrer Erfinder, so z.B. die von Menaichmos mittels Schnitt von Parabeln bzw. Parabel und Hyperbelast.
- Simplikios (6. Jhd.n.Chr.) war Schüler von Ammonios und wirkte in Athen und am Hof des Königs von Persien. Er schrieb Kommentare zu Werken von Aristoteles, die historische Angaben enthalten, z.B. die Möndchen des Hippokrates.

4.2 Zahlschreibweise

Verwendet wurde das (ältere) attische und das (jüngere) milesische System (das im byzantinischen Kulturkreis erst im 14. Jahrhundert durch das indisch-arabische verdrängt wurde).

Das attische Zahlsystem wurde hauptsächlich im kaufmännischen Leben für Geld- und Warenangaben sowie zur Bezeichnung der Spalten des Abakus verwendet (der für das praktische Rechnen verwendet wurde). Es war den römischen Zahlen sehr ähnlich und verwendete die Anfangsbuchstaben der Zahlwerte:

I	Γ	Δ	H	X	M
1	5	10	100	1000	10000
	pente	deka	hekaton	chilioi	myrioi

Dabei ist Γ eine altmodische Schreibweise für Π und wurde mit den anderen Symbolen verbunden, um das Fünffache zu schreiben.

Beim milesischen System wurden Buchstaben des griechischen Alphabets Zahlenwerte gegeben. Anstatt eines Stellenwertsystems wurden für $1, 2, \ldots, 9$ bzw. $10, 20, \ldots, 90$ und $100, 200, \ldots, 900$ verschiedene Buchstaben verwendet:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	$*$	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	$*$
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	$*$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
$,\alpha$	$,\beta$	$,\gamma$	$,\delta$	$,\varepsilon$	$*$	$,\zeta$	$,\eta$	$,\theta$

Da das griechische Alphabet nur 24 Buchstaben hatte, wurden für 6, 90 und 900 die drei Buchstaben Vau (Digamma, Stigma), Koppa und Sampi verwendet.

- Für Tausender verwendete man die Einersymbole mit einem Strich links.
- Für Zehntausender schrieb man die Anzahl über M (für myrioi) oder zwei Punkte über die Buchstaben, also z.B. $\overset{\lambda\beta}{\mathrm{M}}$ oder $\ddot{\lambda}\ddot{\beta}$ für 320 000.
- Für noch größere Zehnerpotenzen verwendete jeder Autor seine eigene Notation.
- Da Buchstaben für Zahlen verwendet wurden, bestand die Gefahr der Verwechslung mit Worten. Darum wurden Zahlen entweder mit einem Strich am Ende gekennzeichnet oder überstrichen, d.h. für 145 wurde $\rho\mu\varepsilon'$ oder $\overline{\rho\mu\varepsilon}$ geschrieben.
- In der griechischen Mathematik bis zum Ende der Zeit Euklids findet man allerdings (im wesentlichen) keine Zahlzeichen. (Archimedes und Diophantos rechneten aber z.B. milesisch.)

- Brüche wurden (wie bei den Ägyptern) als Summe von Stammbrüchen oder mit Zähler und Nenner geschrieben, die nebeneinander oder der Nenner *über* dem Zähler geschrieben wurden.
- Ptolemaios verwendete ein Sexagesimalsystem (wie die Mesopotamier) allerdings geschrieben mit griechischen Buchstaben.
- In den philosophischen Betrachtungen wurde zwischen Einheit (d.h. 1) und Zahlen (d.h. $2, 3, 4, \ldots$) unterschieden. Brüche wurden nicht als Zahlen, sondern als Verhältnisse (natürlicher) Zahlen verstanden und behandelt.

4.3 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

In der griechischen Mathematik wird oft die Aufgabe behandelt, eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Das Lineal ist dabei eine (beliebig lange) gerade Kante – allerdings ohne Markierungen! Ebenso lässt sich der Zirkel beliebig weit öffnen, besitzt aber ebenfalls keine Markierungen. Dabei sind nur die folgenden Konstruktionsschritte erlaubt:

- Eine Gerade durch zwei (verschiedene) Punkte legen
- Einen Kreis zeichnen, der durch zwei (verschiedene) Punkte bestimmt ist. (Der erste Punkt ist der Mittelpunkt des Kreises, der zweite liegt auf der Kreislinie.)
- Den Schnittpunkt zweier (nicht paralleler) Geraden zu bestimmen.
- Die Schnittpunkte (oder den Schnittpunkt) einer Geraden und eines Kreises zu bestimmen (soferne existent).
- Die Schnittpunkte (oder den Schnittpunkt) zweier Kreis bestimmen (soferne existent).

Konstruktionen mit Zirkel und Lineal prägen bis heute die Darstellung der Elementargeometrie im Schulunterricht.

Allerdings sind viele Konstruktionen, wie man sie aus dem Schulunterricht kennt, genau genommen *keine* Konstruktionen mit Zirkel und Lineal!

Ist z.B. ein Punkt P auf einer Gerade g gegeben und lautet die Aufgabe eine Normale auf g durch P zu errichten, so ist die Konstruktion durch Anlegen des Geodreiecks keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal (kann aber leicht durch eine solche ersetzt werden).

Auch einen Abstand in den Zirkel zu nehmen und zu übertragen ist keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal. (Man kann sich vorstellen, dass der Zirkel zuklappt, sobald man ihn vom Papier hochhebt.) Allerdings gibt Euklid gleich am Beginn der Elemente (Buch I, Prop. 2 und 3) eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal an, die genau das leistet.

4.4 Drei klassische Probleme der Geometrie

Insbesondere versuchten die Griechen die folgenden drei Probleme zu lösen (die mit Zirkel und Lineal allerdings unlösbar sind):

1. Würfelverdoppelung (Delisches Problem) Gegeben ist ein Würfel mit Kantenlänge a. Gesucht ist die Kantenlänge x eines Würfels mit doppelt so großem Volumen. D.h. gelöst werden soll die Gleichung $x^3 = 2a^3$, was auf die Konstruktion von $\sqrt[3]{2}$ hinausläuft.

Laut einer Legende hat das Problem den folgenden Ursprung: Die von der Pest geplagen Delier (d.h. die Bewohner der Kykladeninsel Delos) befragten ein Orakel. Der Orakelspruch lautete, sie sollten einen (würfelförmigen) Altar so vergrößern, dass der neue Altar doppelt so großes Volumen hätte. (Es gibt verschiedene Versionen dieser Legende.)

2. Winkeldreiteilung Gegeben ist ein *beliebiger* Winkel, der in drei gleiche Teile geteilt werden soll. (Es gibt Winkel, für die diese Konstruktion möglich ist, z.B. $180°$. Gesucht ist aber eine Konstruktion, die für *jeden* Winkel funktioniert.) Es ist

$$\begin{aligned}
&\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \sin(2\alpha)\sin\alpha \\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\
&= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \cos^3\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha \\
&= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha
\end{aligned}$$

und daher $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos(3\alpha) = 0$. Bezeichnet nun α den gegebenen Winkel, so ist $\alpha/3$ gesucht und es gilt $4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3) - \cos\alpha = 0$. Da man den Winkel $\alpha/3$ genau dann konstruieren kann, wenn man $\cos(\alpha/3)$ konstruieren kann, läuft die Aufgabe darauf hinaus, eine Lösung der Gleichung $4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$ zu konstruieren.

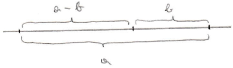
Das Problem der Winkeldreiteilung entstand vermutlich aus dem Problem reguläre Polygone zu konstruieren.

3. Quadratur des Kreises Zu einem gegebenen Kreis mit Radius r ist ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren, d.h. zu lösen ist die Gleichung $x^2 = r^2\pi$, was auf die Konstruktion von $\sqrt{\pi}$ hinausläuft.

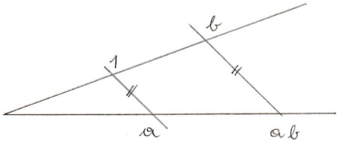
Laut Plutarch soll sich Anaxagoras (circa 500 – 425 v.Chr.) im Gefängnis mit dieser Aufgabe beschäftigt haben.

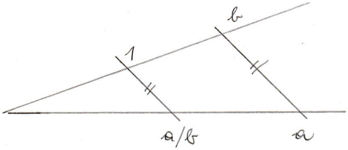
Man weiß seit dem 19. Jahrhundert, dass alle drei Aufgaben nicht durch eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal gelöst werden können. Grund dafür ist, dass sich mit Zirkel und Lineal die vier Grundrechnungsarten und das Ziehen von Quadratwurzeln durchführen lassen – aber auch nicht mehr.

Addition und Subtraktion durch Abschlagen auf einer Gerade:

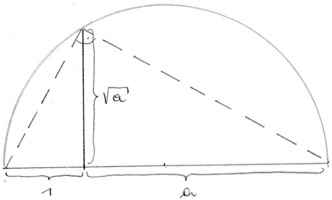


Multiplikation und Division mit Hilfe des Strahlensatzes:





Das Ziehen von Quadratwurzeln mit Hilfe des Höhensatzes:



Algebraische Formulierung: Verwendet man die Konstruktionen für die vier Grundrechnungarten, so kann man, ausgehend von den Punkten 0 und 1, ganz $\mathbf{Q}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren.

Geht man von 0,1 und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ aus, so kann man mit den Konstruktionen für die vier Grundrechnungsarten alle Elemente des Körpers $\mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ konstruieren, d.h. alle Zahlen der Gestalt $p(a_1, \ldots, a_n)/q(a_1, \ldots, a_n)$, wobei p und q Polynome in n Variablen mit rationalen Koeffizienten und $q(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ sind.

Ist also z.B. 0,1 und ein Winkel α gegeben, so kann man – nur mit den Konstruktionen für die vier Grundrechnungsarten – jedes Element des Körpers $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$ mit Zirkel und Lineal konstruieren, d.h. jede Zahl der Gestalt

$$\frac{b_0 + b_1 \cos\alpha + b_2 \cos^2\alpha + \cdots + b_m \cos^m\alpha}{c_0 + c_1 \cos\alpha + c_2 \cos^2\alpha + \cdots + c_n \cos^n\alpha}$$

mit $b_0, \ldots, b_m, c_0, \ldots, c_n \in \mathbf{Q}$ und $c_0 + \cdots + c_n \cos^n\alpha \neq 0$.

Verwendet man zusätzlich die Konstruktion für das Wurzelziehen, so erhält man einen Turm von Körpern

$$K_0 = \mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n) \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$$

wobei $K_{i+1} = K_i(\sqrt{b_i})$ für ein $b_i \in K_i$, $b_i > 0$. (Gibt es kein $x \in K_i$ mit $x^2 = b_i$, so ist $K_i(\sqrt{b_i}) = \{x + \sqrt{b_i}y \mid x, y \in K_i\}$ und $1, \sqrt{b_i}$ ist eine Basis von $K_i(\sqrt{b_i})$ als K_i-Vektorraum.) Jedes $x \in \mathbf{R}$, das in einem solchen K_i enthalten ist, ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Tatsächlich hat man damit schon alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen gefunden, wie man durch Nachrechnen der bei einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal gestatteten Schritte sieht.

Im folgenden sei K ein Zwischenkörper der Körpererweiterung $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ (d.h. $\mathbf{Q} \subseteq K \subseteq \mathbf{R}$).

1) Sind $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in K^2$ verschieden, so ist die Gleichung der Geraden durch diese beiden Punkte

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 - b_2 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

(wobei $\langle v, w \rangle$ das innere Produkt der beiden Vektoren $v, w \in \mathbf{R}^2$ bezeichnet) d.h. $(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y = a_2 b_1 - a_1 b_2$ (mit Koeffizienten in K).

2) Sind $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in K^2$ verschieden, so ist die Gleichung des Kreises mit Mittelpunkt (a_1, b_1) und Radius

$$r = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

gegeben durch

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r^2 = (a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2$$

(mit Koeffizienten in K).

3) Es seien $a_1 x + a_2 y = c$, $b_1 x + b_2 y = d$ zwei Geradengleichungen mit Koeffizienten aus K. Sind die Geraden nicht parallel, so ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

invertierbar und das Gleichungssystem der beiden Geradengleichungen kann auch geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{c}{d}.$$

Seine Lösung ist

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}^{-1} \binom{c}{d} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \binom{c}{d}$$

was in K^2 liegt.

4) Es seien $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ und $y = kx + d$ die Gleichung eines Kreises und einer Geraden mit Koeffizienten aus K (und $r > 0$). In den Schnittpunkten erfüllen die x-Koordinaten x_1, x_2 der Schnittpunkte die Gleichung $(x-a)^2 + (kx+d-b)^2 = r^2$, d.h.

$$(k^2+1)x^2 + 2(k(d-b)-a)x + a^2 + (d-b)^2 - r^2 = 0.$$

Ihre Lösungen sind

$$\begin{aligned} x_{1,2} = \tfrac{1}{2(k^2+1)} \Big(& 2(a-k(d-b)) \\ & \pm \sqrt{4(a-k(d-b))^2 - 4(k^2+1)(a^2+(d-b)^2-r^2)} \Big), \end{aligned}$$

d.h. $x_{1,2} \in K(\sqrt{D})$ mit

$$D = (a-k(d-b))^2 - (k^2+1)(a^2+(d-b)^2-r^2) \geq 0.$$

Es folgt, dass auch die y-Koordinaten $y_{1,2} = kx_{1,2} + d$ der beiden Schnittpunkte in $K(\sqrt{D})$ liegen.

Für eine Gerade $x = c$ (mit $c \in K$) sind $y_{1,2} = b \pm \sqrt{r^2 - (a-c)^2}$ die y-Koordinaten der Schnittpunkte und $y_{1,2} \in K(\sqrt{r^2 - (a-c)^2})$, wobei $r^2 - (a-c)^2 \geq 0$.

5) Seien $(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2$ und $(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2$ die Gleichungen zweier Kreise mit Koeffizienten aus K (und $r_1, r_2 > 0$). Durch Subtraktion der beiden Gleichungen erhält man

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y = r_1^2 - r_2^2 + a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2.$$

Schneiden einander die beiden Kreise, so ist das die Gleichung der Geraden durch die beiden Schnittpunkte (falls es zwei verschiedene Schnittpunkte gibt) bzw. die Gleichung der Tangente an die beiden Kreise (falls es genau einen Schnittpunkt gibt). Die Gleichung hat Koeffizienten aus K und die Schnittpunkte der beiden Kreise können gefunden werden, indem man die dadurch beschriebene Gerade mit einem der beiden Kreise schneidet. Dadurch wird der Schnitt zweier Kreise auf den Schnitt von Kreis und Gerade zurückgeführt.

Verwendet man ein wenig Körpertheorie, so ergibt sich die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $x \in \mathbf{R}$ ist aus 0,1 und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

(ii) Es gibt einen Zwischenkörper K der Körpererweiterung

$$\mathbf{R}/\mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)$$

mit den Eigenschaften $x \in K$ und $[K : \mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)] = 2^k$ für ein $k \geq 0$ (wobei $[K : \mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)]$ die Dimension von K als $\mathbf{Q}(a_1, \ldots, a_n)$-Vektorraum bezeichnet)

Daraus ergibt sich die Unlösbarkeit der drei klassischen Probleme mit Zirkel und Lineal folgendermaßen:

1) Die Würfelverdoppelung ist unmöglich, da $[\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbf{Q}] = 3$.

2) Die Winkeldreiteilung ist für genau jene Winkel α unmöglich, für die das Polynom $p_\alpha(X) = 4X^3 - 3X - \cos\alpha$ keine Nullstelle in $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$ besitzt, da p_α genau dann über $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$ irreduzibel ist und daher $[\mathbf{Q}(\cos\frac{\alpha}{3}) : \mathbf{Q}(\cos\alpha)] = 3$.

Für den Winkel 180°, der mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden kann, ist $\cos(180^\circ) = \cos\pi = -1$ und $p_\pi(X) = 4X^3 - 3X + 1 = (2X - 1)(2X^2 + X - 1)$ besitzt die Nullstelle $\frac{1}{2} = \cos(60^\circ) = \cos\frac{\pi}{3} \in \mathbf{Q}$.

Für den Winkel 60° ist $p_{\pi/3}(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$. Die Gleichung $8X^3 - 6X - 1 = 0$ (und daher auch $4X^3 - 3X - \frac{1}{2} = 0$) besitzt aber keine Lösung in $\mathbf{Q}$ und der Winkel 60° kann nicht mit Zirkel und Lineal gedrittelt werden.

Wäre nämlich m/n Lösung der Gleichung $8X^3 - 6X - 1 = 0$ (mit $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ und $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$), so wäre

$$8m^3 - 6mn^2 - n^3 = 0,$$

woraus $n \mid 8$ und $m \mid 1$ und daher

$$\frac{m}{n} \in \left\{\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}\right\}$$

folgt. Keine dieser Zahlen ist aber Lösung der Gleichung $8X^3 - 6X - 1 = 0$ (wie man leicht überprüft).

3) Die Quadratur des Kreises ist unmöglich, da π transzendent ist (und daher $[\mathbf{Q}(\pi) : \mathbf{Q}] = \infty$).

Der exakte Beweis der Unmöglichkeit der Würfelverdoppelung und der Winkeldreiteilung wurde von Pierre Wantzel (1814 – 1848) im Jahr 1837 publiziert. Die Transzendenz von π (und damit die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises) wurde von Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) im Jahr 1882 bewiesen.

Trotz der bewiesenen Unmöglichkeit versuchen immer noch Laien z.B. eine Winkeldreiteilung mit Zirkel und Lineal zu finden (siehe z.B. U. Dudley, A Budget of Trisections). Ergebnis sind manchmal gute Näherungskonstruktionen, Konstruktionen, die für spezielle Winkel funktionieren oder Konstruktionen, die verbotene Hilfsmittel (wie Einschiebungen, die bald behandelt werden) verwenden.

Ein weiteres klassisches Problem der Antike (das erst um 1800 durch Carl Friedrich Gauss gelöst wurde) ist die Konstruierbarkeit des regelmäßigen n-ecks mit Zirkel und Lineal. Schreibt man das n-eck dem Einheitskreis ein, so bedeutet das, dass man die n-ten Einheitswurzeln (mit Koordinaten $(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$ für $0 \leq k < n$) konstruieren soll. Dabei kommt es nur auf die Konstruierbarkeit der primitiven n-ten Einheitswurzeln (für die $\mathrm{ggT}(k, n) = 1$ gilt) an.

Verwendet man komplexe Zahlen, so ist $e^{2\pi ik/n} = \cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$ und es stellt sich die Frage nach der Konstruierbarkeit der (komplexen) Zahlen im Kreisteilungskörper $\mathbf{Q}(e^{2\pi ik/n})$. Da es $\varphi(n)$ primitive n-te Einheitswurzeln gibt, ist $[\mathbf{Q}(e^{2\pi ik/n}) : \mathbf{Q}] = \varphi(n)$ (wobei φ die Eulersche φ-Funktion bezeichnet). Die Zahlen im Körper $\mathbf{Q}(e^{2\pi ik/n})$ sind genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn $\varphi(n)$ eine Potenz von 2 ist.

Hat n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, so ist

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_k^{\alpha_k - 1}(p_k - 1).$$

Daher ist $\varphi(n)$ genau dann eine Potenz von 2, wenn n die Gestalt $n = 2^\alpha p_1 \dots p_k$ besitzt, wobei $\alpha \geq 0$ ist und $p_1, \dots, p_k$ paarweise verschiedene Fermatsche Primzahlen sind (d.h. $p_i = 2^{2^{m_i}} + 1$ für ein $m_i \geq 0$).

Die bekannten Fermatschen Primzahlen sind 3, 5, 17, 257 und 65537. Das n-eck ist daher mit Zirkel und Lineal konstruierbar für $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots$ aber auch für

$$n = 4\ 294\ 967\ 295 = 2^{32} - 1 = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537.$$

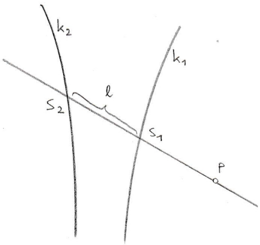
Im Buch IV der Elemente des Euklid findet man Konstruktionen für $n = 3, 4, 5, 6$ und 15 (und man konnte aus einem n-eck ein $2n$-eck konstruieren).

4.5 Andere Konstruktionsschritte

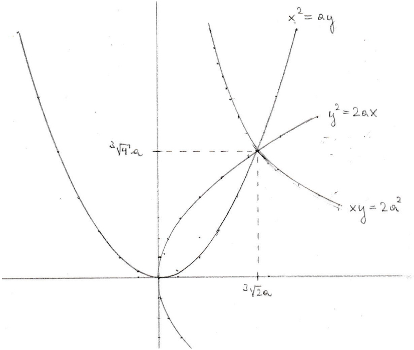
In der griechischen Mathematik wurden auch die folgenden Konstruktionsschritte verwendet, die in einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht erlaubt sind:

1) Verwendung anderer Kurven als Geraden und Kreisen (wie z.B. Parabeln und Hyperbeln).

2) Einschiebung (Neusis): Gegeben seien ein Punkt P, zwei Kurven k_1 und k_2 und eine Länge ℓ. Gesucht ist die Gerade durch den Punkt P, die die beiden Kurven k_1 und k_2 in den beiden Punkten S_1 und S_2 schneidet, deren Abstand ℓ ist (Beschreibung von Pappos).

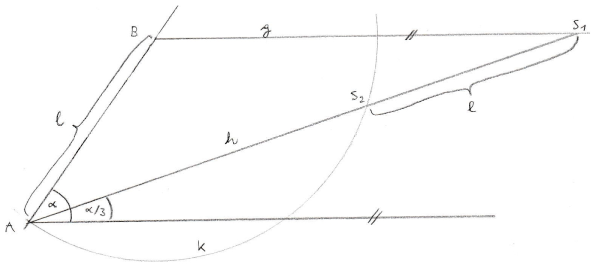


Beispiel zweier Würfelverdoppelungen mit Hilfe von Kegelschnitten (die von Menaichmos stammen und von Eutokios beschrieben werden):



Schneidet man die beiden Parabeln $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ oder die Parabel $x^2 = ay$ mit dem Hyperbelast $xy = 2a^2$, so erhält man (wie man leicht nachrechnet) als Schnittpunkt den Punkt $(x, y) = \left(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a\right)$.

Beispiel einer Winkeldreiteilung mit Einschiebung (die aus dem Buch der Lemmata stammt, das Archimedes zugeschrieben wird):

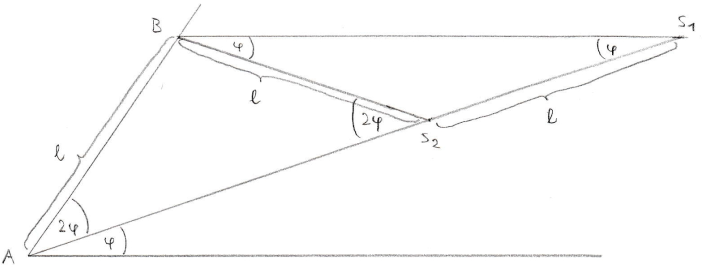


Der Winkel α soll dreigeteilt werden. Zur Verfügung steht ein Lineal mit zwei Markierungen im Abstand ℓ.

1. Konstruiere eine Gerade g durch den Punkt B, die zum anderen Schenkel parallel ist.

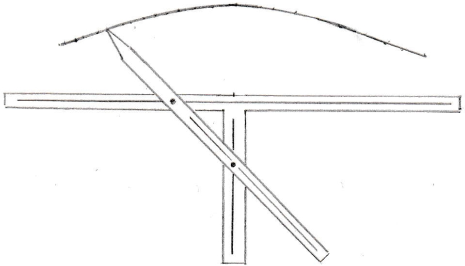
2. Zeichne einen Kreis k um B mit Radius ℓ.

3. Einschiebung: Zeichne eine Gerade h durch A, derart dass der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2 mit k und g gerade ℓ ist.



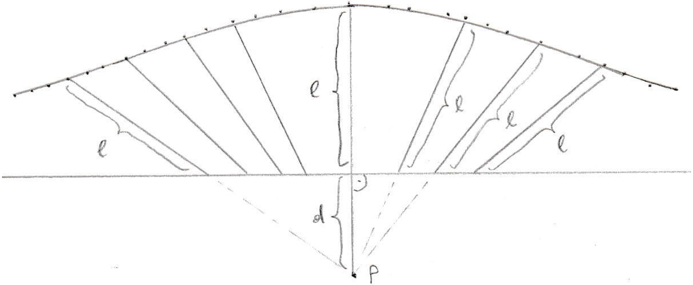
Man erhält auf diese Weise tatsächlich den Winkel $\alpha/3$, denn: Bezeichnet φ den konstruierten Winkel, so ist auch $\sphericalangle BS_1S_2 = \varphi$. Da das Dreieck BS_1S_2 gleichschenkelig ist, ist $\sphericalangle S_1BS_2 = \varphi$ und daher $\sphericalangle BS_2S_1 = \pi - 2\varphi$ und $\sphericalangle AS_2B = 2\varphi$. Da auch das Dreieck ABS_2 gleichschenkelig ist, gilt auch $\sphericalangle BAS_2 = 2\varphi$, was gerade die Behauptung ist.

Im Fall, dass die dem Punkt P näherliegende Kurve k_1 eine Gerade war, wurde auch ein mechanisches Gerät für Einschiebungen verwendet, sozusagen ein Einschiebungszirkel.



Eine Animation, die die Funktionsweise verdeutlicht, findet man unter `https://en.wikipedia.org/wiki/Nicomedes_(mathematician)`.

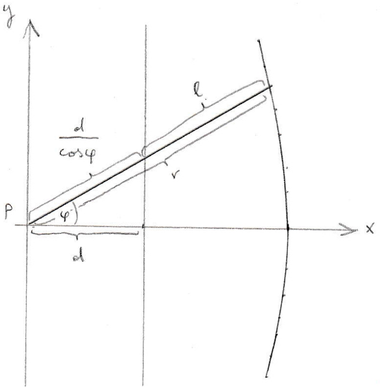
Die so entstehende Kurve wird als Konchoide des Nikomedes bezeichnet. Sie wird z.B. von Pappus überliefert. Nikomedes lebte im 2. oder 3. Jhd.v.Chr. Abstrakt entsteht sie folgendermaßen:



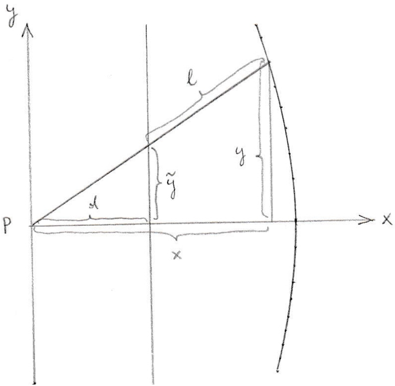
In Polarkoordinaten ist ihre Gleichung (in einem passenden Koordinatensystem mit P im Ursprung)

$$r = \ell + \frac{d}{\cos\varphi} \quad \left(\text{mit } -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \text{ und daher}$$

$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (\ell\cos\varphi + d, \ell\sin\varphi + d\tan\varphi)$, denn:



Man kann die Gleichung der Konchoide auch in kartesischen Koordinaten angeben:



Offenbar gelten $y/x = \tilde{y}/d$ und $(y - \tilde{y})^2 + (x - d)^2 = \ell^2$.

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert

$$\left(y - y\frac{d}{x}\right)^2 + (x-d)^2 = \ell^2$$

bzw.

$$y^2(x-d)^2 + x^2(x-d)^2 = \ell^2 x^2$$

und

$$(x^2+y^2)(x-d)^2 = \ell^2 x^2,$$

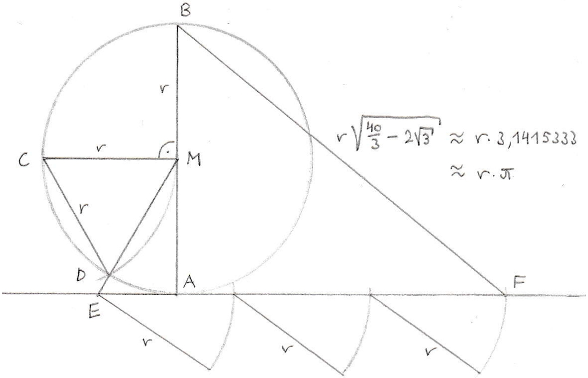
was man umformen kann zu

$$y^2 = \frac{x^2(\ell+d-x)(\ell-d+x)}{(x-d)^2}$$

(mit $d < x \leq \ell + d$).

Nicht verwendet wurden in der griechischen Mathematik üblicherweise Näherungskonstruktionen, d.h. Konstruktionen, die gesuchte Punkte nicht exakt liefern, aber für praktische Zwecke völlig ausreichen.

Beispiel einer Näherungskonstruktion: Näherungsweise Konstruktion des halben Kreisumfangs $r\pi$ eines Kreises mit Radius r nach Kochański (1631 – 1700):



Die Länge der konstruierten Strecke ergibt sich aus

$$\sqrt{(2r)^2 + (3r - r\tan 30^\circ)^2}$$

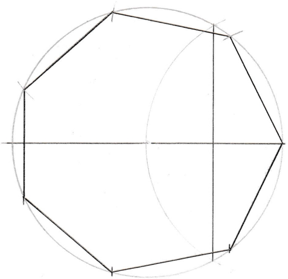
$$= r\sqrt{4 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = r\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}.$$

Die Differenz

$$0 < \pi - \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} < 6 \cdot 10^{-5}$$

ist so klein, dass beim Zeichnen auf einem Blatt Papier die Zeichenungenauigkeit in der Regel deutlich größer sein wird als die Ungenauigkeit der Konstruktion.

Angaben in Herons *Metrika* legen aber nahe, dass die folgende Näherungskonstruktion für das regelmäßige Siebeneck bekannt war:



Dabei wird die Seite des Siebenecks (die Länge $2r\sin\frac{\pi}{7} \approx 0,868r$ hat) durch die halbe Seite des gleichseitigen Dreiecks (mit Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}r \approx 0,866r$) angenähert. (Dabei ist r der Radius des Kreises, in dem Sieben- bzw. Dreieck eingeschrieben werden.) Man findet sie später bei Albrecht Dürer (1471 – 1528).