

## 4.6 Thales von Milet (um 600 v.Chr.)

Thales war (laut Herodot, griechischer Geschichtsschreiber, 5. Jhd.v.Chr.) von phynizischer Herkunft. Er wurde seit dem 4. Jhd.v.Chr. als einer der sieben Weisen bezeichnet.

Proklos Diadochus berichtet in seinem Euklid – Kommentar (unter Berufung auf Eudemos) Thales sei der erste griechische Philosoph und erste Mathematiker gewesen. Er habe die Mathematik von Ägypten nach Griechenland gebracht und selbst viele Entdeckungen gemacht.

Diogenes Laertios (um 200 n.Chr.) berichtet in seinen Biographien von Philosophen (unter Berufung auf den Aristoteles – Schüler Hieronymos) er soll die Höhe der Pyramiden mittels deren Schatten bestimmt haben. Auch soll er eine Sonnenfinsternis 585 v.Chr. vorhergesagt haben, die während einer Schlacht von Lydern und Persern eintraf, worauf der Kampf abgebrochen wurde.

Laut Proklos stammen die folgenden vier Aussagen von Thales:

1. Ein Durchmesser halbiert den Kreis. (Euklid, Elemente I, Def. 17)
2. Die Basiswinkel im gleichschenkeligen Dreieck sind gleich. (Euklid, Elemente I, 5)
3. Die Scheitelwinkel zweier einander schneidender Geraden sind gleich. (Euklid, Elemente I, 15)
4. Ein Dreieck ist durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bestimmt. D.h. zwei Dreiecke, die in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent – einer der Kongruenzsätze, der *Winkel – Seiten – Winkel –Satz*. (Euklid, Elemente I, 26)

Die drei ersten der oben beschriebenen Aussagen sind sehr einfache, grundlegende Sätze, die wir als Symmetrieeigenschaften bezeichnen würden.

Diogenes Laertios berichtet (unter Berufung auf die Geschichtsschreiberin Pamphile, 1. Jhd.n.Chr.) Thales habe

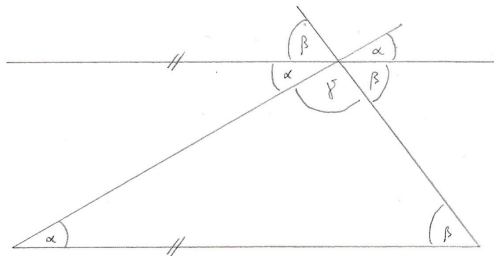
5. den Satz von Thales bewiesen (d.h. der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein rechter Winkel, Euklid, Elemente, III, 31).

Zum Dank für diese Erkenntnis soll Thales den Göttern einen Ochsen geopfert haben. (Allerdings wird die Entdeckung des Satzes von Thales von anderen Pythagoras zugeschrieben.)

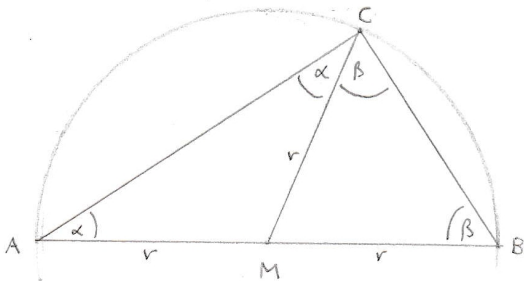
Zu den oben beschriebenen fünf Erkenntnissen wird oft als sechstes hinzugefügt: Die Diagonalen eines Rechtecks sind gleich lang und halbieren einander. (An einem Rechteck mit Diagonalen und Umkreis kann man die meisten der oben beschriebene Aussagen erkennen.)

Geminus von Rhodos berichtet, die Alten (d.h. die frühen ionischen Mathematiker) hätten bewiesen, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei rechte Winkel (d.h.  $180^\circ$ ) beträgt. Der Satz sei schrittweise (d.h. zuerst für gleichseitige, dann für gleichschenkelige, dann für rechtwinkelige und zuletzt für allgemeine Dreiecke) bewiesen worden. Beachte: Für diesen Satz muss man erkennen, dass man Winkel addieren kann!

Beweis der Gleichung  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$  mit geometrischen Methoden:



Mit Hilfe dieses Satzes kann man den Satz von Thales beweisen:



Da das Dreieck  $AMC$  gleichschenkelig ist, ist  $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAM = \alpha$ . Ebenso ist das Dreieck  $MBC$  gleichschenkelig und daher  $\sphericalangle BCM = \sphericalangle CBM = \beta$ . Es folgt, dass  $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta$ . Da die Winkelsumme im Dreieck  $180^\circ$  beträgt, ist  $\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$ , woraus sofort  $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$  und somit  $\alpha + \beta = 90^\circ$  folgt.

## 4.7 Zenon von Elea (5. Jhd.v.Chr.)

Zenon ersann sehr scharfsinnige Paradoxien, um z.B. die reale Existenz der Bewegung zu widerlegen (und über die z.B. Aristoteles in seiner Physik berichtet). Sie haben geholfen, die Entwicklung der Logik zu fördern und führen (aus unserer Sicht) auf die Frage nach der Konvergenz unendlicher Reihen. Zwei davon sind:

**1. Die Dichotomie** Man kann nicht von einem Punkt  $A$  zu einem Punkt  $B$  laufen. Dazu müsste man zuerst die Hälfte der Strecke zurücklegen. Um die Hälfte zurückzulegen, müsste man zuerst ein Viertel zurücklegen, dazu erst ein Achtel, usw. D.h. man müsste unendlich viele Strecken zurücklegen und das kann nicht in endlicher Zeit geschehen. (Heute würde man die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

als Auflösung des Paradoxons betrachten.)

**2. Achilles und die Schildkröte** Achilles und die Schildkröte laufen um die Wette, wobei die Schildkröte einen gewissen Vorsprung zugestanden bekommt. Zenon argumentiert, Achilles könne die Schildkröte nie einholen: Hat Achilles den Ausgangspunkt der Schildkröte erreicht, so ist diese schon ein Stück weiter. Ist Achilles auch dieses Stück gelaufen, so ist die Schildkröte schon ein Stück weiter, usw.

Der Vorsprung der Schildkröte sei  $s_0$ , die Geschwindigkeit der Schildkröte sei  $v$  und die von Achilles sei  $cv$  (mit  $c > 1$ ). Tatsächlich holt Achilles die Schildkröte nach der Zeit  $T$  ein. Er hat nach dieser Zeit die Strecke  $cvT = vT + s_0$  zurückgelegt und daher ist

$$T = \frac{s_0}{cv - v} = \frac{s_0}{(c - 1)v}.$$

(Physikalisch kann man argumentieren, dass Achilles im Ruhesystem der Schildkröte die Geschwindigkeit  $cv - v$  hat.)

Rechnen wir Zenons Argument durch: Achilles erreicht den Ausgangspunkt der Schildkröte nach der Zeit  $t_1 = s_0/(cv)$ . Die Schildkröte legt in dieser Zeit die Strecke  $s_1 = vt_1 = s_0/c$  zurück. Achilles erreicht den neuen Punkt nach der Zeit  $t_2 = s_1/(cv) = s_0/(c^2v)$  und die Schildkröte legt in dieser Zeit die Strecke  $s_2 = vt_2 = s_0/c^2$  zurück.

Verfahre weiter so: Achilles benötigt für die  $k$ -te Strecke die Zeit  $t_k = s_{k-1}/(cv)$  und die Schildkröte legt während dieser Zeit die Strecke  $s_k = vt_k$  zurück. Mit Induktion folgt  $t_k = s_0/(c^k v)$  und  $s_k = s_0/c^k$ . Achilles holt die Schildkröte also zum Zeitpunkt

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \frac{s_0}{v} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k} = \frac{s_0}{v} \frac{1}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{s_0}{v(c-1)} = T$$

ein.



Achilles bzw. die Schildkröte haben bis dahin die Strecke

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = s_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c^k} = s_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{c}} = s_0 \frac{c}{c - 1}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = s_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^k} = s_0 \frac{\frac{1}{c}}{1 - \frac{1}{c}} = \frac{s_0}{c - 1}$$

zurückgelegt.

Man kann Zenons Paradoxon aber auch vom Standpunkt der Physik aus als Frage nach der Natur von Raum und Zeit interpretieren.

## 4.8 Hippokrates von Chios (5. Jhd.v.Chr.)

– nicht zu verwechseln mit Hippokrates von Kos (um 400 v.Chr.), auf den der hippokratische Eid der Ärzte zurückgeht.

Hippokrates wirkte in Athen. Er schrieb (laut Proklos) ein Lehrbuch (ebenfalls namens *Elemente*), das dem Schema Voraussetzung – Behauptung – Beweis folgte, in dem er das damalige geometrische Wissen zusammenfasste. Es wurde später von den Elementen des Euklid vollständig verdrängt und ist verlorengegangen.

Die folgenden beiden seiner mathematischen Erkenntnisse sind erhalten geblieben:

1) Er führte die Würfelverdoppelung (d.h. gesucht ist  $x$  mit  $x^3 = 2a^3$ ) auf das Problem zurück, zwei *mittlere Proportionale*  $x$  und  $y$  mit den Eigenschaften  $a : x = x : y = y : 2a$  zu finden (überliefert durch Eutokios von Askalon in seinem Kommentar zu *Kugel und Zylinder* von Archimedes, in dem 12 Lösungsverfahren zur Würfelverdoppelung und ihre Erfinder angegeben werden).

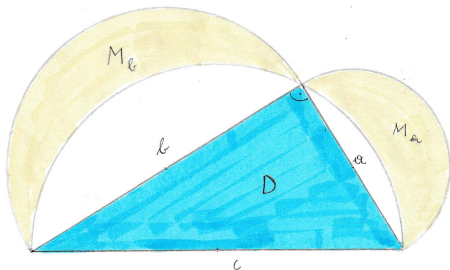
Ist  $a/x = x/y = y/(2a)$ , so folgt sofort

$$2ax = y^2 = \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = \frac{x^4}{a^2}$$

und daher  $2a^3x = x^4$  und somit  $2a^3 = x^3$ .

Diese Zurückführung der Würfelverdoppelung hatte großen Einfluss auf die Entwicklung der griechischen Mathematik, da viele versuchten, diese beiden Proportionalen zu finden.

2) Am bekanntesten sind seine *Möndchen* (überliefert von Simplicios):

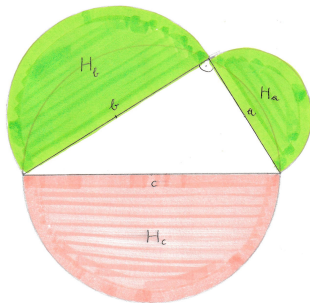


Die Summe der Flächen der beiden Möndchen  $M_a$  und  $M_b$  ist die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks  $D$ . Hippokrates wurde berühmt dafür, als erster eine krummlinig begrenzte Flächen quadriert zu haben (d.h. ein flächengleiches Quadrat konstruiert zu haben).

Nach dem Satz des Pythagoras gilt  $a^2 + b^2 = c^2$  und daher

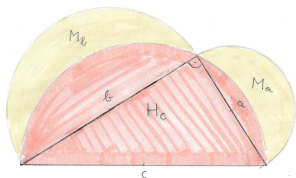
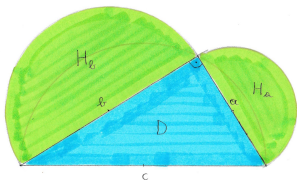
$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2} \right)^2 \pi = \frac{1}{2} \left( \frac{c}{2} \right)^2 \pi,$$

d.h. die Flächeninhalte  $F(H_a)$ ,  $F(H_b)$  und  $F(H_c)$  der drei Halbkreise  $H_a$ ,  $H_b$  und  $H_c$  erfüllen  $F(H_a) + F(H_b) = F(H_c)$ .



Es gilt nun offenbar

$$F(H_a) + F(H_b) + F(D) = F(H_c) + F(M_a) + F(M_b)$$



Subtrahiert man davon die Gleichung  $F(H_a) + F(H_b) = F(H_c)$ , so erhält man

$$F(D) = F(M_a) + F(M_b),$$

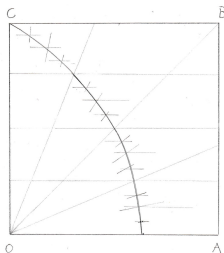
was gerade die Behauptung ist.

## 4.9 Demokrit von Abdera (um 400 v.Chr.)

verfasste zahlreiche mathematische Werke (*Über die Berührung von Kreis und Kugel*, *Über Geometrie*, *Über Zahlen*, *Über irrationale Strecken*, *Über Ausbreitungen*), die verlorengegangen sind. Man kennt ihre Titel (aus einer Aufzählung von Diogenes Laertios) und Bruchstücke ihres Inhalts aus Zitaten. Laut Archimedes (in seiner Schrift *Die Methode*) hat Demokrit erkannt, dass für das Volumen von Kegel und Tetraeder die Formel  $V = \frac{1}{3}Ah$  gilt (mit  $V$  Volumen,  $A$  Grundfläche,  $h$  Höhe). Der erste nach damaligen Maßstäben korrekte Beweis stammt allerdings wohl erst von Eudoxos. Bei Plutarch findet man ein Fragment, das eine Überlegung Demokrits beschreibt. Darin wird ein Kegel mit Ebenen geschnitten, die parallel zur Grundfläche sind. Demokrit stellt sich offenbar vor, der Kegel sei aus unendlich vielen Kreisscheiben der Dicke null zusammengesetzt. Diese Argumentation erinnert stark an das Prinzip von Cavalieri und macht Demokrit zu einem Vorläufer der Infinitesimalrechnung.

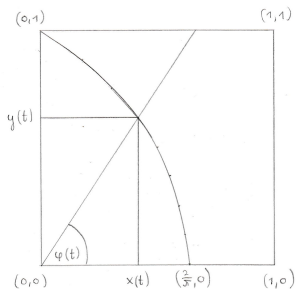
## 4.10 Hippias von Elis (um 400 v.Chr.)

fand eine Winkeldreiteilung mit Hilfe der sogenannten Quadratrix (die von Pappos beschrieben wird):



Im Quadrat  $OABC$  bewegt sich die Strecke  $BC$  mit gleichmäßiger Geschwindigkeit nach unten. Gleichzeitig dreht sich die Gerade durch  $O$  und  $C$  mit gleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit um  $O$ , derart dass  $BC$  und  $OC$  zum selben Zeitpunkt starten und zum selben Zeitpunkt die Strecke  $OA$  erreichen. Die Schnittpunkte der beiden Strecken liegen zu jedem Zeitpunkt auf der Quadratrix.





Um die Gleichung der Kurve zu bestimmen, fassen wir das Quadrat als das Einheitsquadrat mit den Eckpunkten  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  und  $(1,1)$  auf und legen fest, dass die Bewegung zum Zeitpunkt 0 beginnt und zum Zeitpunkt 1 endet. Sei also  $0 \leq t \leq 1$ . Dann gilt zum Zeitpunkt  $t$ , dass  $y(t) = 1 - t$  und  $\varphi(t) = \frac{\pi}{2}(1 - t) = \frac{\pi}{2}y(t)$ . Für  $0 < t < 1$  gilt dann

$$x(t)/y(t) = \cot \varphi(t) = \cot(\pi y(t)/2)$$

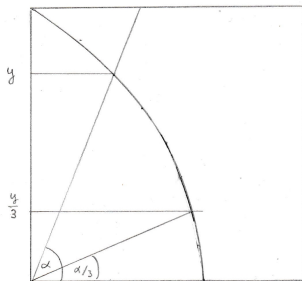
und daher  $x(t) = y(t) \cot \frac{\pi y(t)}{2}$ .

Die Gleichung der Kurve ist also

$$x = y \cot \frac{\pi y}{2}.$$

Es handelt sich um die erste transzendente (d.h. nicht algebraische) Kurve in der Geschichte der Mathematik.

Wegen  $\varphi = \frac{\pi}{2}y$  und daher  $\frac{\varphi}{3} = \frac{\pi}{2} \frac{y}{3}$  kann man sie zur Winkeldreiteilung benutzen (oder allgemeiner, um einen Winkel in  $n$  gleiche Teile zu teilen):



Der Name Quadratrix rührt daher, dass man sie auch zur Quadratur des Kreises benutzen kann. (Das wurde (laut Pappos) von Deinostratos (um 350 v.Chr.) entdeckt.) Modern formuliert beruht das auf der Relation

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow 0^+} y \cot \frac{\pi y}{2} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\tan \frac{\pi y}{2}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2}{\pi} \cos^2 \frac{\pi y}{2} = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Man kann mit Zirkel und Lineal beliebig viele Punkte auf der Quadratrix konstruieren und daher beliebig gute Näherungen für  $\pi$  (aber nicht  $\pi$  selbst).