4.11 Pythagoras von Samos (circa 580 – 500 v.Chr.) und die Pythagoreer

Pythagoras unternahm (laut Diogenes Laertius) Reisen nach Ägypten und Mesopotamien (von wo er vermutlich mathematisches Wissen mitbrachte) und verließ Samos, um der dortigen Tyrannenherrschaft zu entkommen. Um 525 v.Chr. ließ er sich in Kroton (in Unteritalien) nieder und gründete eine religiöse Gemeinschaft mit strengen Vorschriften, die uns zum Teil bizarr vorkommen.

Die Gemeinschaft der Pythagoreer erlangte starken politischen Einfluss, wurde angefeindet und musste Kroton verlassen. Sie fanden um 510 v.Chr. Zuflucht in Metapont, wo Pythagoras um 500 v.Chr. starb. Der Bund der Pythagoreer bestand weiter. Sie wurden zwischen 460 und 440 v.Chr. aus Süditalien vertrieben und viele ihrer Mitglieder ermordet. Zwar gab es nach wie vor Pythagoreer, aber sie verloren im 4. Jhd.v.Chr. an Bedeutung.

Im 1. Jhd.n.Chr. gab es eine Neubelebung durch sogenannte Neupythagoreer. Viele Informationen (und Legenden) über die ursprünglichen Pythagoreer stammen aus dieser Zeit. Iamblichos schrieb eine Art Enzyklopädie der pythagoreischen Lehre, die eine wichtige Quelle ist.

Pythagoras soll erkannt haben, dass die Höhe von Tönen (bzw. musikalische Intervalle) vom Verhältnis der Längen schwingender Saiten abhängt (wie Oktave 2:1, Quinte 3:2, Quarte 4:3). Die Pythagoreer entwickelten aber nicht nur eine musikalische Harmonielehre, sondern eine Harmonielehre, die auf Zahlenverhältnissen beruhte. Sie unterscheiden sich von anderen religiösen Sekten ihrer Zeit dadurch, dass sie den Begriff der Zahl ins Zentrum ihrer religiös-philosophischen Überlegungen stellten (wovon Aristoteles in seiner Metaphysik berichtet) gemäß dem pythagoreeischen Motto *Alles ist Zahl.*

Ein Teil der Pythagoreer wurde (laut Iamblichos) als *Mathematikoi* bezeichnet, d.h. die, die *Mathemata* (d.h. die Lerngegenstände) pflegten. D.h. das Wort Mathematik begann damals seine heutige Bedeutung zu bekommen.

Da viele Berichte über Pythagoras und die Pythagoreer erst Jahrhunderte später aufgezeichnet wurden, ist nicht mehr feststellbar, welche Resultate von Pythagoras selbst stammen (und ob er überhaupt eigenständige Ergebnisse erzielt hat). Schon Platon und Aristoteles sprechen immer nur von *den Pythagoreern* und nicht von einzelnen Mitgliedern.

Zahlentheorie bei den Pythagoreern

Man glaubt, dass drei der zahlentheoretischen Bücher der Elemente des Euklid (das VII., VIII. und IX. Buch) größtenteils von den Pythagoreern stammen. Der Neupythagoreer Nikomachus von Gerasa schrieb eine Arithmetik, die pythagoreeisches Gedankengut enthält. Insbesondere beschäftigten sich die Pythagoreer mit den folgenden zahlentheoretischen Fragen:

1) Einteilung der (natürlichen) Zahlen, insbesondere Unterscheidung zwischen **geraden und ungeraden Zahlen** und ihren Eigenschaften (sozusagen rechnen modulo 2) und die Begriffe **Teiler, ggT, kgV** und **Primzahl.**

2) **Vollkommene Zahlen** sind Zahlen n, die Summe ihrer positiven Teiler $< n$ sind, d.h.

$$\sum_{d|n, d<n} d = n$$

wie z.B. 6, 28 und 496. (Diese Definition findet man in den Elementen des Euklid, Buch VII, Def. 22.) Diese Zahlen standen offenbar in besonderer Harmonie mit sich selbst (was den Namen erklärt).

Man glaubt, dass der folgende Satz von den Pythagoreern stammt: Ist p eine natürliche Zahl, derart dass

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{p-1} = 2^p - 1$$

eine Primzahl ist, so ist $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ eine vollkommene Zahl (Euklid, Elemente, Buch IX, Prop. 36).

Die positiven Teiler d von n mit $d < n$ sind genau $1, 2, 4, \ldots, 2^{p-1}$ und $2^p - 1, 2(2^p - 1), \ldots, 2^{p-2}(2^p - 1)$ und daher

$$\sum_{d|n, d<n} d = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i + \sum_{i=0}^{p-2} 2^i(2^p - 1) = \sum_{i=0}^{p-1} 2^i + (2^p - 1) \sum_{i=0}^{p-2} 2^i$$

$$= \frac{2^p - 1}{2 - 1} + (2^p - 1) \frac{2^{p-1} - 1}{2 - 1} = 2^p - 1 + (2^p - 1)(2^{p-1} - 1)$$
$$= (2^p - 1)(1 + 2^{p-1} - 1) = 2^{p-1}(2^p - 1) = n.$$

Leonhard Euler bewies im 18. Jhd., dass jede gerade vollkommene Zahl diese Gestalt besitzen muss.

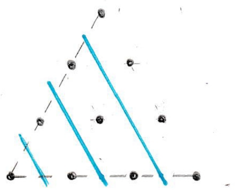
Verwandt ist der Begriff der *befreundeten Zahlen*, d.h. Zahlen n, m mit der Eigenschaft

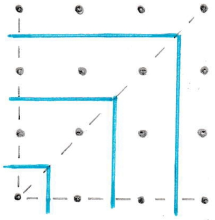
$$\sum_{d|n, d<n} d = m \quad \text{und} \quad \sum_{d|m, d<m} d = n \text{ wie z.B. 220 und 284.}$$

3) **Figurierte Zahlen,** wie z.B. Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Fünfeckszahlen, für die folgende Darstellungen gelten:

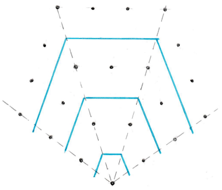
$$\text{Dreieckszahlen:} \quad \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Quadratzahlen:} \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$$





Fünfeckszahlen: $$\sum_{k=0}^{n-1}(3k+1) = \frac{3n^2 - n}{2}$$



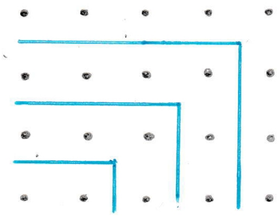
Allgemein entsteht die n-te p-eckszahl durch die Summe

$$\sum_{k=0}^{n-1}((p-2)k+1) = (p-2)\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{(p-2)n^2 - (p-4)n}{2}$$

Im 17. Jhd. bemerkte Pierre de Fermat, dass sich jede positive ganze Zahl als Summe von höchstens n n-eckszahlen darstellen lässt.

Weitere figurierte Zahlen sind die Rechteckszahlen

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1),$$



sowie die dreidimensionalen Pyramidenzahlen (mit dreickiger oder quadratischer Basis) und Kubikzahlen.

4) Laut Proklos stammt die Vorschrift

$$k^2 + \left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2+1}{2}\right)^2$$

(mit ungeradem k) zur Konstruktion **pythagoreischer Trippel,** d.h. Trippel (x, y, z) positiver ganzer Zahlen, die

$$x^2 + y^2 = z^2$$

erfüllen, von Pythagoras, während er die Formel

$$(2k)^2 + (k^2-1)^2 = (k^2+1)^2,$$

Platon zuschreibt.

5) **Verhältnisse und Mittelwerte:** Z.B. hat Pythagoras (laut Iamblichos) aus Babylon das Wissen über die Relation

$$m : \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{m+n}{2} : n$$

d.h.

$$m \Bigg/ \frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{m}{2}\frac{m+n}{mn} = \frac{m+n}{2n} = \frac{m+n}{2} \Bigg/ n$$

zwischen zwei natürlichen Zahlen m, n und ihrem harmonischen und arithmetischen Mittel

$$\frac{2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad \frac{m+n}{2}$$

mitgebracht. Zusätzlich zu arithmetischem, geometrischen und harmonischen Mittel beschreiben Nikomachus und Pappus sieben weitere Mittelwerte.

6) Entdeckung der inkommensurablen Größen (d.h. Entdeckung der **Irrationalzahlen**), d.h. die Entdeckung von Strecken, deren Längen in keinem rationalen Verhältnis zueinander stehen.

Die Entdeckung wird meist Hippasos von Metapont (5. Jhd.v.Chr.) zugeschrieben (der die Existenz inkommensurabler Größen verraten haben soll). Inkommensurable Größen könnten am Quadrat entdeckt worden sein. In den Handschriften von Euklids Elementen findet man am Ende des X. Buches den Beweis, dass Seite und Diagonale eines Quadrats inkommensurabel sind. (Es handelt sich im wesentlichen um den noch heute gebräuchlichen Beweis, dass $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.) Dieser Satz ist vermutlich nicht von Euklid in den Text aufgenommen worden, sondern später hinzugefügt worden. Aristoteles bezieht sich in seinen Schriften mehrmals auf diesen Beweis.

Um ein gemeinsames Maß für zwei Zahlen zu finden, führte man *Wechselwegnahme* durch. Modern ausgedrückt: Um den ggT für zwei positive ganze Zahlen $a < b$ zu finden, benützt man die Relation $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(a, b - a)$, die man so oft anwendet, bis das Verfahren abbricht (Euklid, Elemente VII,2). Modern ausgedrückt führt das auf den euklidischen Algorithmus.

Versucht man nun, auf diese Weise ein gemeinsames Maß für Diagonale und Seite eines Quadrats (d.h. für $\sqrt{2}$ und 1) zu finden, so bricht dieses Verfahren nicht ab:

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2} - 1)$$

$$1 = 2(\sqrt{2} - 1) + (3 - 2\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$$

$$\sqrt{2} - 1 = 2(\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^3$$

$$\dots$$

$$(\sqrt{2} - 1)^n = 2(\sqrt{2} - 1)^{n+1} + (\sqrt{2} - 1)^{n+2} \quad \text{für alle } n \geq 0$$

Man kann das auch durch eine Kettenbruchentwicklung beschreiben (die man im Fall endlicher Kettenbruchentwicklungen mit Hilfe des euklidischen Algorithmus bestimmt): Die oben beschriebenen Relationen kann man zu

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + (\sqrt{2} - 1)$$

umschreiben. Setzt man die zweite wiederholt in die erste ein, so erhält man die regelmäßige Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots}}}} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$$

Es spricht einiges dafür, dass die Existenz inkommensurabler Größen nicht am Quadrat, sondern am regelmäßigen Fünfeck entdeckt wurde:

- Das Fünfeck bzw. Pentagramm waren das Symbol der Pythagoreer.
- Hippasos soll sich mit dem Dodekaeder beschäftigt haben, der von regelmäßigen Fünfecken begrenzt ist.
- In einem regelmäßigen Fünfeck verhalten sich die Längen von Diagonale und Seite wie

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \notin \mathbf{Q}.$$

- Auch hier bricht der Prozess der Wechselwegnahme nicht ab bzw. führt auf die regelmäßige Kettenbruchentwicklung von $(1+\sqrt{5})/2 = [1; 1, 1, 1, \ldots]$.

Geometrie bei den Pythagoreern

Die ersten vier Bücher der Elemente des Euklid (die sich mit ebener Geometrie beschäftigen) dürften auf Mathematiker der ionischen Periode (und insbesondere auf die Pythagoreer) zurückgehen. Resultate, die den Pythagoreern zugeschrieben werden, sind:

- Die Summe der Winkel im Dreieck ist zwei Rechte (Euklid, Elemente I, 32) gibt Proklos unter Berufung auf Eudemos an.
- Der Satz des Pythagoras (Euklid, Elemente I, 47). Auch hier berichtet Proklos, dass die Entdeckung des Satzes Pythagoras zugeschrieben wird, scheint aber nicht völlig davon überzeugt zu sein. Andere Autoren (wie Plutarch und Diogenes Laertios) verweisen auf einen gewissen Apollodorus, der aber nur von einem *berühmten Satz* schreibt, den Pythagoras bewiesen hätte.

- Die Pythagoreer dürften die Existenz der fünf Platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) erkannt haben. (Diese werden so genannt, weil sie im Timaios-Dialog Platons alle fünf auftreten.) Das bedeutet aber noch nicht, dass sie in der Lage waren, sie alle fünf exakt zu konstruieren, wie das im XIII. Buch der Elemente des Euklid geschieht.

  Iamblichos schreibt, Hippasus hätte als erster die Konstruktion des Dodekaeders publiziert.

  In einer Randnotiz zum XIII. Buch der Elemente des Euklid wird behauptet, dass Würfel, Tetraeder und Dodekaeder auf die Pythagoreer zurückgehen würden, nicht aber Oktaeder und Ikosaeder (die Theaitetos zugeschrieben werden).

(Geometrische) Algebra bei den Pythagoreern

Möglicherweise als Reaktion auf die Entdeckung inkommensurabler Größen wurden Sachverhalte, die wir algebraisch ausdrücken würden (wie z.B. das Distributivgesetz) mit Hilfe von Längen von Strecken und Flächeninhalten formuliert und bewiesen. Dadurch wurde die Algebra auf positive Größen eingeschränkt (was eine Weiterentwicklung behindert bzw. unmöglich gemacht haben dürfte).

Ein Kernstück dieser *geometrischen Algebra* ist die sogenannte *Flächenanlegung*, die laut Proklos (der sich auf Eudemos beruft) auf die Pythagoreer zurückgeht. Sie ermöglicht es, ein Polygon in ein flächengleiches Rechteck (oder allgemeiner Parallelogramm) bzw. Quadrat zu verwandeln.

Mit Hilfe der Flächenanlegung kann man lineare und quadratische Gleichungen geometrisch lösen.

Da alle Größen positiv sein sollten, musste bei quadratischen Gleichungen zwischen den drei Gleichungen

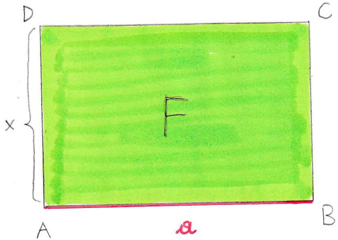
$$ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx \text{ und } ax^2 = bx + c$$

(jeweils für $a, b, c > 0$) unterschieden werden. Da auch nur positive Lösungen $x > 0$ zugelassen waren, ergab sich ein weiteres Problem: Zwar haben die Gleichungen $ax^2 + bx = c$ und $ax^2 = bx + c$ genau eine positive Lösung, nämlich

$$\frac{1}{2a}\left(\sqrt{b^2 + 4ac} - b\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2a}\left(\sqrt{b^2 + 4ac} + b\right),$$

für die Gleichung $ax^2 + c = bx$ kann es allerdings 0, 1 oder 2 positive Lösungen geben und man musste nach Bedingungen für die Lösbarkeit suchen.

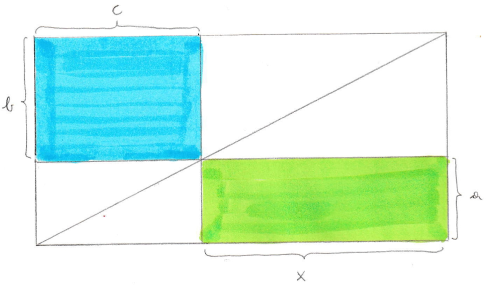
Bei der Flächenanlegung wird zu einer gegebenen Strecke AB mit Länge a ein Rechteck (oder allgemeiner Parallelogramm) konstruiert, das AB als Seite hat und Flächeninhalt F besitzt (d.h. man löst die Gleichung $ax = F$ geometrisch).



Man sagt dann, dass Rechteck $ABCD$ mit Flächeninhalt F sei an die Strecke AB angelegt worden.

Das griechische Wort für anlegen ist *paraballein.* Daher stammt unser Wort *Parabel.*

Anwendungsbeispiel ist die (geometrische) Lösung der linearen Gleichung $ax = bc$, d.h. die Fläche F ist durch ein Rechteck mit Seitenlängen b und c gegeben.



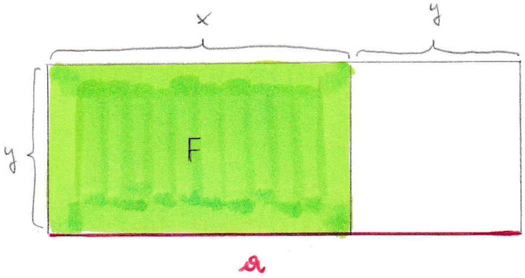
Die Diagonale hat Steigung

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{x},$$

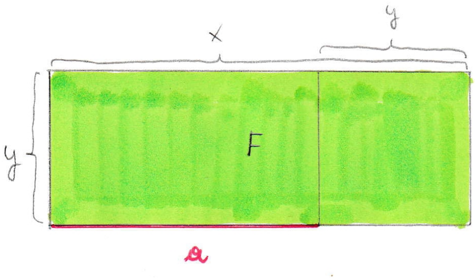
woraus sofort $ax = bc$ folgt.

Elliptische und hyperbolische Flächenanlegungen können zur Lösung quadratischer Gleichungen verwendet werden.

Bei elliptischen Flächenanlegungen fehlt ein Flächenstück (griechisch *elleipein* heißt fehlen):



Bei hyperbolischen Flächenanlegungen wird etwas hinzugefügt (griechisch *hyperballein* heißt überschießen):



Allgemeinere Konstruktionen, die das leisten, findet man in den Elementen des Euklid im VI. Buch.

In den obigen Zeichnungen entspricht die elliptische Flächenanlegung dem Gleichungssystem

$$x + y = a, \quad xy = F,$$

d.h. x erfüllt die quadratische Gleichung $x(a - x) = F$ bzw.

$$x^2 + F = ax.$$

Wie oben bemerkt muss eine solche Gleichung im allgemeinen keine positive Lösung haben. Für die Existenz einer positiven Lösung muss die Bedingung

$$\frac{a^2}{4} \geq F$$

erfüllt sein.

Analog entspricht die hyperbolische Flächenanlegung dem Gleichungssystem

$$x - y = a, \quad xy = F,$$

d.h. x erfüllt die quadratische Gleichung $x(x-a) = F$ oder

$$x^2 = ax + F$$

und y erfüllt die quadratische Gleichung $(y+a)y = F$ oder

$$y^2 + ay = F.$$

Apollonius von Perge (um 200 v.Chr.) wandte diese Konstruktionen in seiner Kegelschnittlehre auf die Scheitelgleichungen der Kegelschnitt an, woraus sich die heute üblichen Bezeichnungen Parabel, Ellipse und Hyperbel ergeben haben.