4.12 Mathematiker im Umfeld von Platons Akademie

Theodoros von Kyrene (circa 460 – 390 v.Chr.) soll (laut Iamblichos) Pythagoreer und (laut Diogenes Laertios) Platons Lehrer auf dem Gebiet der Mathematik gewesen sein. Platon berichtet in seinem Dialog *Theaitetos*, er habe (modern formuliert) die Irrationalität von

$$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots, \sqrt{17}$$

bewiesen, d.h.

$$\sqrt{n} \notin \mathbf{Q}$$

für

$$n \in \{3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17\}.$$

Theaitetos (circa 415 – 369 v.Chr.) war Schüler Theodoros und Freund Platons, der ihn in dem nach ihm benannten Dialog beschreibt. Ihm werden folgende mathematische Leistungen zugeschrieben:

1) Eine Theorie der (quadratischen) Irrationalzahlen, die die Grundlage für das X. Buch der Elemente des Euklid bildet. Dabei wird nicht der Begriff der Irrationalzahl eingeführt, sondern ihre Eigenschaften durch Proportionen ausgedrückt, etwa $a^2 : x^2 = m : n$ (d.h. $x = a\sqrt{n/m}$). Davon ausgehend werden die (quadratischen) Irrationalzahlen klassifiziert, was z.B. auf Ausdrücke der Gestalt $\sqrt{a\sqrt{b}}$, $a\sqrt{b} - b\sqrt{a}$ und $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ führt.

2) Konstruktionen für die fünf Platonischen Körper, insbesondere soll die exakte Behandlung von Oktaeder und Ikosaeder auf ihn zurückgehen. Dabei wurden Ergebnisse über Irrationalzahlen verwendet, um die Kantenlängen zu beschreiben. Diese Ergebnisse findet man im XIII. Buch der Elemente des Euklid.

Archytas von Tarent (erste Hälfte des 4. Jhd.v.Chr.) war Pythagoreer und Freund Platons. Von ihm sind die folgenden Resultate überliefert:

1) Ihm Rahmen seiner Studien über Musiktheorie bewies er, dass zwei Zahlen, die im Verhältnis $(n+1):n$ stehen, keine (ganzzahlige) mittlere Proportionale besitzen. (Der Beweis wurde von Boetius (circa 480 – 525 n.Chr.) überliefert und man findet eine Version davon in der Schrift *Sectio Canonis* von Euklid.)

2) Er fand eine verblüffende dreidimensionale Lösung für Hippokrates' Umformulierung der Würfelverdoppelung, bei der (modern formuliert) ein Kegel, ein Zylinder und ein Torus miteinander geschnitten werden (ebenfalls überliefert durch Eutokios in seinem Kommentar zu *Kugel und Zylinder*).

In moderner Formulierung: Sind $a < b$ die beiden Größen, zwischen denen zwei mittlere Proportionale gesucht sind, so betrachte

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 \quad \text{(Kegel)}$$

$$x^2 + y^2 = bx \quad \text{(Zylinder)}$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = b\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(Torus).}$$

Die erste Gleichung beschreibt einen Kreiskegel, dessen Achse die x-Achse ist, was man durch Umformung der Gleichung zu

$$\sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} \cdot x \quad (\text{für } x \geq 0)$$

sieht.

Die zweite Gleichung beschreibt einen Zylinder, dessen Schnitt mit der xy-Ebene der Kreis

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$$

mit Mittelpunkt $(\frac{b}{2}, 0)$ und Radius $\frac{b}{2}$ ist.

Dass die dritte Gleichung einen Torus mit Innendurchmesser 0 beschreibt, erkennt man an der Umformung der Gleichung zu

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{b}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{b^2}{4}.$$

Diese beschreibt die Menge aller Punkte, die zu einer Kreislinie mit Radius $\frac{b}{2}$ und Mittelpunkt im Nullpunkt in der xy-Ebene Abstand $\frac{b}{2}$ haben. Dass der Innendurchmesser 0 ist, erkennt man auch daran, dass der Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ die Gleichung erfüllt.

Im Schnitt von Kegel und Zylinder gilt

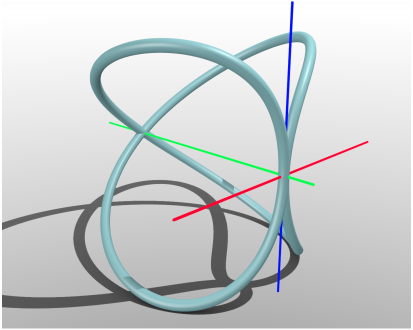
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a^2}$$

und zusammen mit der Gleichung des Torus erhält man

$$\frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Für $b = 2a$ erhält man die gesuchte Lösung für die Umformulierung des Hippokrates. In diesem Fall ist a sowohl der Radius des Zylinders, als auch der Radius der Kreislinie, von der die Punkte am Torus ebenfalls Abstand a haben, $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist der Abstand des Schnittpunkts der drei Flächen vom Nullpunkt und $\sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand der Projektion dieses Schnittpunkts auf die xy-Ebene vom Nullpunkt.

Der Schnitt von Zylinder und Torus wird oft als Kurve des Archytas bezeichnet:



Eine Graphik, in der Teile aller drei Flächen gezeichnet sind, findet man unter `http://www.larouchepub.com/eiw/public/2002-33/bruce3/images/correctarchytus02a1.jpg`.

Eudoxos von Knidos (erste Hälfte des 4. Jhd.v.Chr.) war (laut Diogenes Laertios) Schüler von Archytas und der wahrscheinlich bedeutendste Mathematiker seiner Zeit. Von ihm stammen die folgenden Ergebnisse:

1) Eine allgemeine Theorie der Proportionen, die auch auf inkommensurable Größen anwendbar ist und die die Grundlage für das V. Buch der Elemente des Euklid bildet.

Darin tritt auch eine Version des Archimedischen Axioms auf (Euklid, Elemente V, Def. 4), das wir modern so ausdrücken: Sind $a, b > 0$ reelle Zahlen, so gibt es eine natürliche Zahl n mit der Eigenschaft $na > b$. Archimedes schreibt das Archimedische Axiom (in der *Quadratur der Parabel*) Eudoxos zu. (Seinen Namen hat es erst später erhalten.)

Das VI. Buch der Elemente des Euklid enthält Anwendungen der Theorie der Proportionen aus dem V. Buch auf die ebene Geometrie.

2) Die Exhaustionsmethode, bei der Flächeninhalte (und ebenso Volumina) durch sukzessives Ausfüllen der Fläche mit Polygonen bestimmt wird. Dadurch erhält man eine Folge einfach zu berechnender Flächeninhalte, die gegen den gesuchten Wert konvergiert. Sie ist im XII. Buch der Elemente des Euklid enthalten (das möglicherweise zur Gänze von Eudoxos stammt).

Archimedes schreibt (in *Kugel und Zylinder*) Eudoxos als Anwendung den ersten Beweis zu, dass das Volumen einer Pyramide $\frac{1}{3}$ des Volumens des Prismas mit derselben Basis und Höhe ist (Euklid, Elemente, XII, 7 für Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche) bzw. dass das Volumen eines Kegels $\frac{1}{3}$ des Volumens des Zylinders mit derselben Basis und Höhe ist (Euklid, Elemente, XII, 10).

3) Eudoxos soll eine Lösung für Hippokrates' Umformulierung des Delischen Problems angegeben haben, die gekrümmte Linien verwendet hat, allerdings nicht überliefert ist.

Menaichmos (Mitte des 4.Jhd.v.Chr.) war (laut Proklos) Schüler des Eudoxos. Er hat bei der Suche nach einer Lösung für Hippokrates' Umformulierung des Delischen Problems die Kegelschnitte entdeckt. Seine beiden Lösungen (die Eutokios beschreibt) entsprechen dem Schnitt der Parabel $x^2 = ay$ und des Hyperbelasts $xy = 2a^2$ bzw. dem Schnitt der beiden Parabeln $x^2 = ay$ und $y^2 = 2ax$ und sind bereits beschrieben worden.

Deinostratos (Mitte des 4.Jhd.v.Chr.) war (laut Proklos) der Bruder von Menaichmos. Er entdeckte (laut Pappos) die Möglichkeit, die Quadratrix des Hippias von Elis zur Quadratur des Kreises zu benützen (wodurch sie ihren Namen erhalten hat).