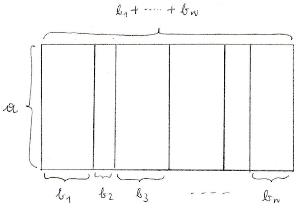
4.16 Buch II der Elemente

Der Großteil des II. Buchs der Elemente beschreibt Relationen zwischen Flächeninhalten, die wir lieber algebraisch formulieren, d.h. die sogenannte geometrische Algebra. Es beginnt mit

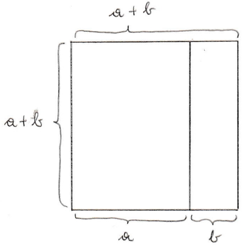
Buch II, 1 *Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.*



was man durch die Gleichung $a(b_1 + \cdots + b_n) = ab_1 + \cdots + ab_n$ (mit $a, b_1, \ldots, b_n > 0$) ausdrücken kann.

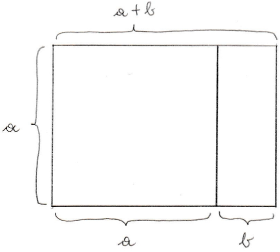
Ebenso kann man die daran anschließenden Aussagen umschreiben:

Buch II, 2 *Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so sind die Rechtecke aus der ganzen Strecke und beiden einzelnen Abschnitten zusammen dem Quadrat über der ganzen Strecke gleich.*



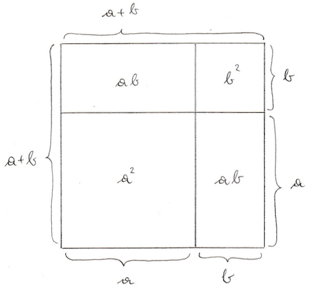
$$(a+b)a+(a+b)b=(a+b)^2$$

Buch II, 3 *Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte dem Rechteck aus den Abschnitten und dem Quadrat über vorgenannten Abschnitt zusammen gleich.*



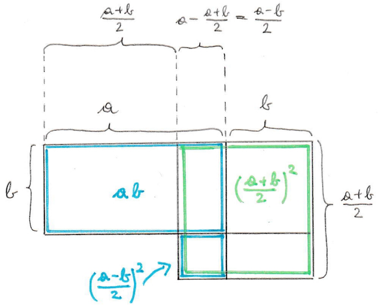
$$(a+b)a = ab + a^2$$

Buch II, 4 *Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.*



$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

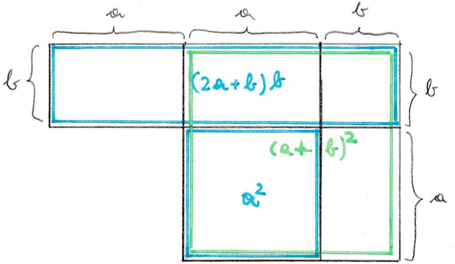
Buch II, 5 *Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilungspunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.*



Das kann man durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

Buch II, 6 *Halbiert man eine Strecke und setzt ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.*



Das kann man als $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$ schreiben.

Eine klassische Interpretation von Buch II, 5 und 6 ist, dass sie die Lösung von quadratischen Gleichungen der Gestalt $ax \pm x^2 = b^2$ ermöglichen, was von anderen Autoren in jüngerer Zeit bezweifelt wurde. Leichter als Lösung (spezieller) quadratischer Gleichungen zu interpretieren sind

Buch II, 11 *Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über den anderen Abschnitt gleich ist.*

was sich zu $a(a-x) = x^2$ oder $x^2 + ax = a^2$ umschreiben lässt und

Buch II, 14 *Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten.*

was man als $x^2 = ab$ interpretieren kann, da die *geradlinige Figur* im ersten Schritt in ein Rechteck gleichen Flächeinhalts verwandelt wird. (Wie das zu bewerkstelligen ist, wurde in Buch I, 45 behandelt.)

Wir betrachten die von Euklid angegebene Lösung für die in Buch II, 11 gestellte Aufgabe genauer, die man kann als geometrische Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 + ax - a^2 = 0$ auffassen kann. (Dabei bezeichnet a die Länge der gegebenen Strecke und x die Länge des anderen Abschnitts.)

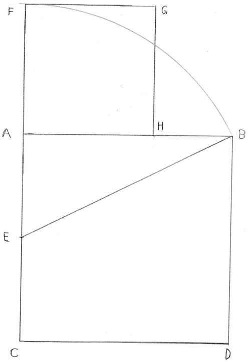
Die Lösungen dieser Gleichung sind

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a.$$

Da $x > 0$ ist, gilt also

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a.$$

Euklid gibt die folgende Konstruktion als Lösung an. Die gegebene Strecke sei AB.



Die Behauptung ist, dass dann $\overline{AB} \cdot \overline{BH} = \overline{AH}^2$ gilt, d.h. die Aufgabe wurde mit $a = \overline{AB}$ und $x = \overline{AH}$ gelöst.

- 1. Zeichne das Quadrat $ABCD$.
- 2. Halbiere die Strecke AC um den Punkt E zu erhalten.
- 3. Verbinde B und E.
- 4. Verlängere AC, um F zu finden, wobei $\overline{EF} = \overline{BE}$ gelten soll.
- 5. Zeichne das Quadrat $AFGH$.

Ist $\overline{AB} = a$, so ist tatsächlich

$$\overline{BE} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

und daher

$$\overline{AH} = \overline{BE} - \overline{AE} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}.$$

Euklids Beweis verläuft folgendermaßen: Nach Buch II, 6 ist

$$\overline{CF} \cdot \overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{EF}^2.$$

Da nach Konstruktion $\overline{EF} = \overline{EB}$, folgt

$$\overline{CF} \cdot \overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{EB}^2.$$

Nach dem Satz des Pythagoras (Buch I, 47) gilt

$$\overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2.$$

Einsetzen gibt

$$\overline{CF} \cdot \overline{FA} + \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$$

und durch Subtraktion von $\overline{AE}^2$ erhält man

$$\overline{CF} \cdot \overline{FA} = \overline{AB}^2.$$

Nach Konstruktion gelten nun

$$\overline{CF} = \overline{AB} + \overline{AH}, \quad \overline{FA} = \overline{AH} \quad \text{und} \quad \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH}.$$

Setzt man das ein, so erhält man

$$(\overline{AB} + \overline{AH}) \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \cdot (\overline{AH} + \overline{BH})$$

und somit

$$\overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} + \overline{AB} \cdot \overline{BH},$$

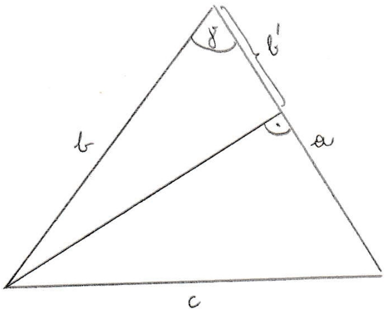
woraus nach Subtraktion von $\overline{AB} \cdot \overline{AH}$ gerade

$$\overline{AH}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH}$$

folgt. (Euklid argumentiert bei den letzten Schritten geometrisch aber ansonsten völlig gleich.)

In Buch II, 12 und 13 wird der Kosinussatz bewiesen, und zwar in Buch II, 12 für stumpfwinkelige Dreiecke und in Buch II, 13 für spitzwinkelige Dreiecke. Dabei wird der Kosinus nicht verwendet, die Formulierung lautet vielmehr

Buch II, 13 *An jedem spitzwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der einem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite kleiner als die Quadrate über den diesen spitzen Winkel umfassenden Seiten zusammen um zweimal das Rechteck aus einer der Seiten um diesen spitzen Winkel, nämlich der, auf die das Lot fällt, und der durch das Lot innen abgeschnittenen Strecke an dieser spitzen Ecke.*



Das besagt gerade

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab' = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$