4.18 Buch IV der Elemente

Buch IV behandelt die folgenden Konstruktionsaufgaben:

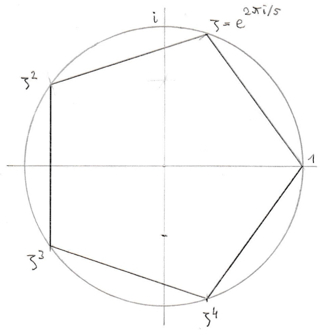
- Buch IV, 2 Einem Kreis ein Dreieck mit vorgegebenen Winkeln einschreiben.
- Buch IV, 3 Einem Kreis ein Dreieck mit vorgegebenen Winkeln umschreiben.
- Buch IV, 4 Konstruktion des Inkreises eines Dreiecks.
- Buch IV, 5 Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks.
- Buch IV, 6 Einem Kreis ein Quadrat einschreiben.
- Buch IV, 7 Einem Kreis ein Quadrat umschreiben.
- Buch IV, 8 Konstruktion des Inkreises eines Quadrats.
- Buch IV, 9 Konstruktion des Umkreises eines Quadrats.
- Buch IV, 10 Ein gleichschenkeliges Dreieck mit den Winkeln $\alpha = \beta = 72^\circ$ und $\gamma = 36^\circ$ konstruieren (was bei der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks verwendet wird).

- Buch IV, 11 Einem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck einschreiben.
- Buch IV, 12 Einem Kreis ein regelmäßiges Fünfeck umschreiben.
- Buch IV, 13 Konstruktion des Inkreises eines regelmäßigen Fünfecks.
- Buch IV, 14 Konstruktion des Umkreises eines regelmäßigen Fünfecks.
- Buch IV, 15 Einem Kreis ein regelmäßiges Sechseck einschreiben.
- Buch IV, 16 Einem Kreis ein regelmäßiges Fünfzehneck einschreiben.

Für die Aufgaben, ein Sechs- oder Fünfzehneck einem Kreis umzuschreiben bzw. In- oder Umkreiskreis zu konstruieren, wird nur angegeben, dass es sich wie beim Fünfeck bewerkstelligen lässt.

Wir gehen auf die von Euklid in Buch IV, 11 angegebene Konstruktion näher ein. Geht man vom Einheitskreis in der komplexen Ebene aus und nimmt an, dass einer der Eckpunkte des eingeschriebenen Fünfecks der Punkt 1 ist, so sind die Eckpunkte des Fünfecks die Punkte $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$. Dabei ist ζ die primitive fünfte Einheitswurzel

$$\zeta = e^{2\pi i/5} = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}.$$



Wir berechnen zunächst die drei Werte

$$\cos\frac{2\pi}{5}, \quad \sin\frac{2\pi}{5} \quad \text{und} \quad \sin\frac{2\pi}{10}.$$

Da ζ fünfte Einheitswurzel ist, gilt einerseits

$$\zeta + \zeta^4 = \zeta + \zeta^{-1} = \zeta + \overline{\zeta} = 2\,\mathrm{Re}\,\zeta = 2\cos\frac{2\pi}{5}$$

(nach der Eulerschen Formel) und andererseits

$$0 = \zeta^5 - 1 = (\zeta - 1)(\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1).$$

Da $\zeta \neq 1$ folgt also

$$\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1 = 0.$$

Setzt man $\alpha = \zeta + \zeta^4$, so folgt

$$\alpha^2 = (\zeta + \zeta^4)^2 = \zeta^2 + 2\zeta^5 + \zeta^8 = \zeta^2 + 2 + \zeta^3$$

und daher

$$\alpha^2 + \alpha = \zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 2 = (\zeta^4 + \zeta^3 + \zeta^2 + \zeta + 1) + 1 = 1.$$

D.h. α ist eine Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$. Diese sind

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Da $\alpha > 0$ folgt

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

und daher

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \cos(72^\circ) = \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Aus

$$1 = \cos^2 \frac{2\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{8} + \sin^2 \frac{2\pi}{5}$$

folgt

$$\sin^2 \frac{2\pi}{5} = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{8} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

und daher

$$\sin \frac{2\pi}{5} = \sin(72^\circ) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Für einen beliebigen Winkel α gilt

$$\cos\alpha = \cos\Big(2\cdot\frac{\alpha}{2}\Big) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= \Big(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big) - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

woraus

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

folgt. Wendet man diese Relation auf $\alpha = 2\pi/5$ an, erhält man

$$\sin^2\frac{2\pi}{10} = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\Big) = \frac{5-\sqrt{5}}{8} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

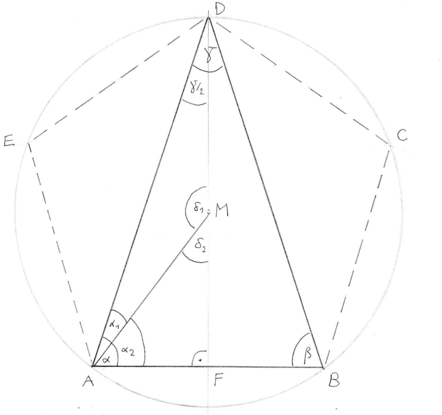
und

$$\sin\frac{2\pi}{10} = \sin(36^\circ) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Als Vorbereitung für die Konstruktion des Fünfecks löst Euklid die folgende Konstruktionsaufgabe.

Buch IV, 10 *Ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten, in dem jeder der beiden Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist wie der letzte Winkel.*

Da die Winkelsumme im Dreieck 180° ist, muss im gesuchten Dreieck also $\alpha = \beta = 72^\circ$ und $\gamma = 36^\circ$ gelten. Der Grund für die Konstruktion eines derartiges Dreiecks ist, dass es im Fünfeck auftritt, und zwar gebildet durch die beiden Diagonalen, die von einem Punkt ausgehen und der diesem Punkt gegenüberliegenden Seite.



Wir wissen, dass

$$\delta_1 = \frac{2}{5} \cdot 360^\circ = 144^\circ.$$

Da das Dreieck *AMD* gleichschenkelig ist, gilt $\alpha_1 = \gamma/2$.

Da die Winkelsumme im Dreieck AMD 180° beträgt, folgt

$$2 \cdot \frac{\gamma}{2} + \delta_1 = 180^\circ$$

und daher

$$\gamma = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Da $\delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$ ist

$$\delta_2 = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ.$$

Da die Winkelsumme im Dreieck AFM 180° beträgt, ist

$$\alpha_2 + \delta_2 + 90^\circ = 180^\circ.$$

Daraus folgt

$$\alpha_2 = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$$

und

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 18^\circ + 54^\circ = 72^\circ.$$

Euklid verwendet bei der Konstruktion eines solchen Dreiecks, dass sich seine Seiten im Verhältnis

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

zueinander verhalten. Nach dem Sinussatz gilt nämlich

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{2\pi}{10}}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})^2}{100-4\cdot 5}} = \frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \frac{2\cdot 5-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Bei der Lösung wird Buch II, 11 verwendet. (In dieser Proposition wurde zu einer gegebenen Strecke eine andere konstruiert, deren Länge genau in diesem Verhältnis zur Länge der gegebenen Strecke steht.)

Nach diesen Vorbereitungen behandelt Euklid die Konstruktion des Fünfecks.

Buch IV, 11 *Einem gegebenen Kreis ein gleichseitiges und gleichwinkliges Fünfeck einzuschreiben.*

Er löst diese Aufgabe, indem er dem gegebenen Kreis zunächst ein gleichschenkeliges Dreieck mit Winkeln $\alpha = \beta = 72°$ und $\gamma = 36°$ einschreibt. Damit hat er drei Eckpunkte des Fünfecks gefunden und kann auch die beiden noch fehlenden Eckpunkte leicht konstruieren.

Die Aufgabe, einem Kreis ein Dreieck mit gegebenen Winkeln einzuschreiben, hat Euklid in Buch IV, 2 allgemein gelöst. Im vorliegenden Spezialfall ist sie einfacher (und wir gehen nicht darauf ein).

Die von Euklid angegebene Konstruktion des regelmäßigen Fünfzehnecks (Buch IV, 16) beruht auf der Gleichung

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\Big).$$

Um ein Fünfzehntel eine Kreislinie zu konstruieren, muss man daher nur den Mittelpunkt zwischen den Endpunkten eines Drittelkreises und eines Fünftelkreises bestimmen, deren andere Endpunkte zusammenfallen.