4.25 Archimedes – Leben und Werk

- Archimedes kann als der wahrscheinlich bedeutendste Mathematiker der Antike gelten und hat auch auf dem Gebiet der Physik (insbesondere der Mechanik, Statik und Hydrostatik) große Leistungen vollbracht.
- Er stammte aus Syrakus (auf Sizilien) und stand dem dortigen Königshaus nahe, möglicherweise war er sogar mit ihm verwandt.
- Wahrscheinlich hat er sich einige Zeit in Alexandria aufgehalten und dort wichtige Teile seiner Ausbildung erhalten.
- Er korrespondierte mit Mathematikern der alexandrinischen Schule (wie z.B. mit Eratosthenes).

- Er hatte nach mehreren Berichten einen entscheidenden Anteil an der Verteidigung von Syrakus während der Belagerung durch römischen Truppen von 214 bis 212 v.Chr. während des zweiten punischen Krieges.
- Er wurde bei der Eroberung von Syrakus im Jahr 212 v.Chr. von römischen Soldaten getötet.
- Laut dem byzanthinischen Gelehrten Johannes Tzetzes (12. Jhd.) war er zu diesem Zeitpunkt 75 Jahre alt, woraus sich als Lebensdaten 287 bis 212 v.Chr. ergeben würden.
- Proklos schreibt in seinem Euklid – Kommentar, dass Archimedes nach Ptolemaios I. lebte (der 285 v.Chr. abdankte und zwei Jahre später starb) und ungefähr gleich alt wie Eratosthenes war.

- Auch Heron schreibt, dass Archimedes und Eratosthenes Zeitgenossen waren. (Auch wenn man nicht genau sagen kann, wann Heron gelebt hat, ist seine Angabe die Archimedes zeitlich am nächsten stehende Quelle.)
- Eutokios erwähnt in seinem Kommentar eine von einem gewissen Herakleides verfasste Biographie des Archimedes, die aber nicht erhalten ist.

Über Archimedes (und seine Leistungen) wird unter anderem folgendes berichtet. (Das eine oder andere davon ist wohl nicht mehr als eine Legende.)

- Archimedes erfand die Archimedische Schraube, mit deren Hilfe Wasser von einem tieferen auf ein höheres Niveau gepumpt werden kann. Er soll diese Erfindung in Ägypten gemacht haben.

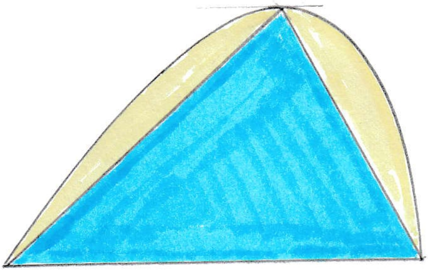
- Archimedes soll beim Bau des damals größten Schiffs *Syrakosia* mitgewirkt und dafür eine Pumpe beigesteuert haben, die es einem einzigen Mann erlaubte, das Schiff leerzupumpen. Auch soll er den Stapellauf mit Hilfe einer mechanischen Vorrichtung wesentlich vereinfacht haben.
- Vitruv (1. Jhd.v.Chr.) berichtet folgendes: König Hieron II. vermutete, dass ein Goldschmied, bei dem er eine goldene Krone in Auftrag gegeben hatte, ihn betrogen hatte, indem er einen Teil des Golds durch ein anderes Metall ersetzte. Er beauftragte Archimedes mit der Untersuchung des Vorwurfs. Der soll (im Bad liegend) schlagartig die Lösung des Problems erkannt haben und vor lauter Freude nackt nach Hause gelaufen sein und dabei *Eureka! Eureka!* (*Ich hab's! Ich hab's!*) gerufen haben.

- Archimedes stellte Planetarien her (oder ließ sie herstellen), von denen der römische Feldherr Marcellus zwei als Kriegsbeute nach Rom mitgebracht haben soll. Archimedes soll auch ein Buch über die Herstellung von Planetarien verfasst haben, das allerdings nicht erhalten ist. (Dass die dafür nötigen großen feinmechanischen Fähigkeiten in der Antike vorhanden waren, wird von einem komplizierten Mechanismus belegt, der 1900 von Tauchern vor der Insel Antikythera aus einem gesunkenen Schiff geborgen wurde und dessen Funktionsweise seit Anfang des 21. Jahrhunderts mit modernen technischen Mitteln untersucht wird.)

- Archimedes hatte die Verteidungsanlagen von Syrakus auf außerordentlich durchdachte Weise mit Katapulten und Wurfmaschinen verschiedener Reichweite bestückt, weswegen die Stadt für die römischen Truppen sehr schwer einzunehmen war.
- Außerdem soll er Kriegsmaschinen konstruiert haben, die römische Schiffe in die Höhe hoben und so fallen ließen, dass sie sanken oder an Felsen zerschellten. Auch die Konstruktion von Brennspiegeln, mit denen die Schiffe in Brand gesteckt wurden, wird ihm zugeschrieben (aber meist bezweifelt).
- Bei der Eroberung von Syrakus soll Archimedes, der in einen mathematischen Beweis vertieft war, zu einem römischen Soldaten *Noli turbare circulos meos* (*Störe meine Kreise nicht*) gesagt haben, woraufhin dieser in tötete. Der römische Feldherr Marcellus, der sich darauf gefreut hatte, Archimedes kennenzulernen, soll darüber gar nicht erfreut gewesen sein.

Werke

Die Quadratur der Parabel: Ein Parabelsegment wird von innen und außen durch Vielecke approximiert, um seine Flächeninhalt zu bestimmen. Aus moderner Sicht handelt es sich um eine Vorwegname des Riemann-Integrals. Archimedes beweist, dass die Fläche eines Parabelsegments 4/3 der Fläche des Dreiecks mit der selben Grundlinie und Höhe ist.



Kugel und Zylinder: Berechnung der Oberfläche und des Volumens einer Kugel, sowie von Teilen von Kugeln (wie Kugelsegmente, die durch Schnitt einer Kugel mit einer Ebene entstehen). Archimedes beweist, dass das Volumen einer Kugel $2/3$ des Volumens eines umgeschriebenen Zylinders ist. D.h. hat die Kugel Radius r (und daher Volumen $\frac{4}{3}r^3\pi$), so hat der Zylinder ebenfalls Radius r und Höhe $2r$ und daher Volumen

$$r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} r^3\pi.$$

Dieselbe Relation gilt für die Oberfläche der beiden Körper, d.h. $4r^2\pi$ für die Kugel und

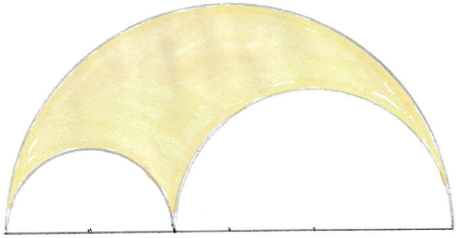
$$2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot 2r = 6r^2\pi = \frac{3}{2} \cdot 4r^2\pi$$

für den Zylinder.

Über Spiralen: Behandlung der archimedischen Spirale (d.h. der Kurve $r = c\varphi$ für ein $c > 0$ in Polarkoordinaten), genauer Berechnung des zwischen den Windungen enthaltenen Flächeninhalts und der Tangenten an die Spirale.

Über Konoide und Sphäroide (auch **Über Paraboloide, Hyperboloide und Ellipsoide** genannt) behandelt Rotationsparaboloide, Rotationsellipsoide und (zweischalige) Rotationshyperboloide bzw. das Volumen ihrer Segmente, die durch Schnitt mit einer Ebene entstehen.

Das Buch der Lemmata oder **liber assumptorum** (nur arabisch überliefert) enthält 15 Propositionen aus der ebenen Geometrie, darunter die bereits beschriebene Winkeldreiteilung mit Hilfe einer Einschiebung (die aus Proposition 8 folgt) und Aussagen über den Arbelos (*Schuhmacher – Messer*).



Die Kreismessung (nur als Fragment überliefert) enthält (modern formuliert) die Abschätzung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

(Dabei ist $3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71} \approx 0,002$ und $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ ein Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von π.) Dafür berechnet Archimedes näherungsweise den Umfang regelmäßiger 96-ecken, die dem Kreis ein- und umgeschrieben werden. Als Ausgangspunkt verwendet er (ohne Begründung) die Abschätzungen

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Über den Ursprung dieser Abschätzungen wird lebhaft diskutiert. Beide Schranken sind Näherungsbrüche der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$, also in gewissem Sinn bestmöglich.

Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks (nur arabisch überliefert) beschreibt die Konstruktion des Heptagons mit Hilfe einer Art verallgemeinerten Einschiebung.

Stomachion behandelt ein geometrisches Puzzle (eine Art Legespiel), das durch Zerteilen des Rechtecks durch gerade Schnitte entsteht.

Laut Pappos hat Archimedes die 13 **Archmedischen Körper** aufgezählt. Dabei handelt es sich um konvexe Polyeder, bei denen alle Ecken gleich aussehen und die als Seitenflächen regelmäßige Vielecke verschiedener Art haben. Sie entstehen z.B. dadurch, dass man bei Platonischen Körpern auf geeignete Art Ecken abschneidet. Sehr ansprechende Darstellungen findet man z.B. unter folgender Adresse:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Archimedean_solid`

Die Sandzahl (oder **Sandrechnung**): Darin beschreibt Archimedes ein System, um große Zehnerpotenzen anzuschreiben, die mit Hilfe der üblichen griechischen Notation nicht mehr ausgedrückt werden können. Er argumentiert dann, dass seine Schreibweise ausreicht, um die Anzahl der Sandkörner zu beschreiben, die nötig wären, um das gesamte Universum auszufüllen. (Dabei geht er natürlich von einer damaligen Vorstellung über die Größe des Universums aus.) Der Text ist an König Gelon gerichtet (d.h. er wurde für eine interessierten Laien verfasst) und hat darum vergleichsweise geringes mathematisches Niveau. In der Einleitung verweist Archimedes auf eine früheren seiner Texte mit ähnlichem Inhalt, der aber nicht erhalten ist.

Laut arabischen Autoren (insbesondere al-Birimi, um 1000) geht die **Heronsche Formel** (die den Flächeninhalt eines Dreiecks durch seine Seitenlängen ausdrückt) auf Archimedes zurück.

Die sogenannte **Methodenlehre** ist ein Brief an Eratosthenes, in dem Archimedes beschreibt, wie man geometrische Sachverhalte durch (pseudo)physikalische Gedankenexperimente finden kann.

Das Rinderproblem ist ein arithmetisches Rätsel in Gedichtform. Es führt auf ein Gleichungssystem mit 7 Gleichungen in 8 Unbekannten (mit zwei zusätzlichen Bedingungen), dessen Lösungen sehr große Zahlen sind. Nach einer Legende hat Archimedes dieses Rätsel an Eratosthenes geschickt, um ihn auf humorvolle Art in seine Schranken zu weisen, da dieser ständig behauptete, die Lösungen der von Archimedes gelösten Probleme selbst schon gefunden zu haben.

Weitere mathematische Werke (wie z.B. **Über einander berührende Kreise**) werden Archimedes von arabischen Autoren zugeschrieben.

Dazu kommen einige Schriften mit physikalisch-geometrischem Inhalt, von denen mehrere nicht erhalten sind, aber von anderen Autoren (wie Pappos, Heron, Theon) erwähnt werden. Überliefert sind **Über das Gleichgewicht ebener Flächen** (oder **Über den Schwerpunkt ebener Flächen**) und **Über schwimmende Körper**.

Die vier erstgenannten Werke (Quadratur der Parabel, Kugel und Zylinder, Über Spiralen, Über Konoide und Sphäroide) enthalten als Einleitung je einen Brief an einen gewissen Dositheos.

Da diese Briefe Verweise aufeinander enthalten, kann man annehmen, dass sie in dieser Reihenfolge geschrieben wurden. (Archimedes erwähnt in diesen Briefen mehrmals einen gewissen Konon, an den er sie eigentlich hatte schreiben wollen, der aber gestorben war.)

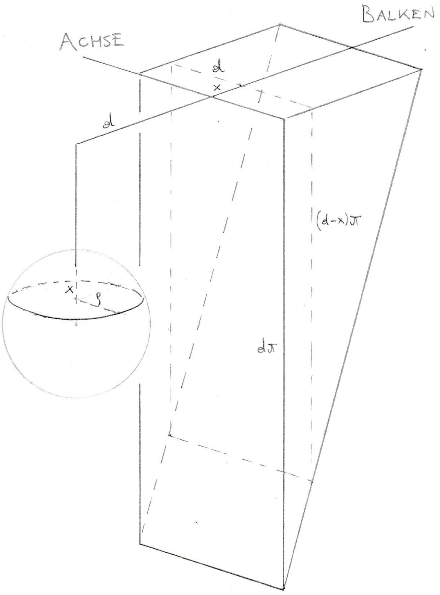
Ansonsten wird die Reihenfolge, in der Archimedes seine Werke verfasst hat, lebhaft diskutiert.

Großes Interesse hat das Schicksal eines Palimpsests gefunden. Dabei handelt es sich um ein mittelalterliches Gebetsbuch, bei dem unter dem neueren Text unter anderem Fragmente von Texten von Archimedes befanden. Die *Methodenlehre* ist z.B. nur in diesem Palimpsest enthalten. Es wurde 1906 in Konstantinopel vom dänischen Mathematikhistoriker Heiberg gefunden und seine wesentlichen Teile publiziert. Danach befand es sich jahrzehntelang in Privatbesitz und wurde nicht sachgemäß aufbewahrt. Als es 1998 bei Christie's in New York versteigert wurde, war es in einem sehr schlechten Zustand und wesentlich schlechter lesbar als zu Heibergs Zeiten. Es wurde von einem (offensichtlich sehr reichen) Unbekannten um 2 Millionen Dollar ersteigert. (Der Staat Griechenland steigerte ebenfalls mit und konnte da nicht mehr mithalten.) Der Besitzer unterstützt seitdem die Untersuchung des Palimpsests mit modernen technischen Hilfsmitteln. (Eine lesenswerte populärwissenschaftliche Darstellung ist das Buch Reviel Netz, William Noell, The Archimedes Codex.)

Archimedes' mechanische Methode

Archimedes dürfte viele seiner mathematischen Sätze zunächst durch mechanische Überlegungen gefunden haben und sie erst anschließend mit rein mathematischen Hilfsmitteln bewiesen haben. Wir demonstrieren seine Methode anhand der Bestimmung des Kugelvolumens, bemühen uns dabei aber mehr darum, das Verfahren zu veranschaulichen, als um eine originalgetreue Darstellung.

Gegeben sei eine Kugel mit Durchmesser d (bzw. Radius r), deren Volumen V wir bestimmen wollen. Wir stellen uns vor, wir hängen die Kugel auf einer Waage im Abstand d von der Achse des Waagebalkens auf. Wir schneiden die Kugel nun im Abstand x vom Aufhängungspunkt mit einer waagrechten Ebene. Der Schnitt ist ein Kreis mit Radius ρ und Flächeninhalt $\rho^2\pi$.


BALKEN
ACHSE
d
x
d
(d-x)π
x
ρ
dπ

Nach dem Höhensatz ist $\rho^2 = x(d-x)$ und der Flächeninhalt des Schnittkreises daher $x(d-x)\pi$. Da der Mittelpunkt des Schnittkreises sein Schwerpunkt ist, übt er ein Drehmoment der Größe $dx(d-x)\pi$ aus.

Um das auszugleichen, bringen wir auf der anderen Seite des Waagebalkens im Abstand x von der Achse ein Rechteck mit Seitenlängen d und $(d-x)\pi$ an.

Lässt man x von 0 bis d laufen, durchlaufen die Schnittkreise die gesamte Kugel und der anderen Seite des Waagebalkens entsteht ein keilförmiges Prisma mit Volumen

$$\frac{1}{2} d\pi \cdot d \cdot d = \frac{1}{2} d^3 \pi.$$

Wir wollen nun das Drehmoment bestimmen, das das gesamt Prisma ausübt: Kennt man die Lage des Schwerpunkts eines Dreiecks, so weiß man, dass dieser Abstand $d/3$ von der Achse des Waagebalkens hat, d.h. das Drehmoment ist

$$\frac{d}{3} \cdot \frac{d^3\pi}{2} = \frac{d^4\pi}{6}.$$

Alternativ kann man das Drehmoment auch durch Integration finden. Es ist

$$\int_0^d dx(d-x)\pi \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^d (d^2x - dx^2) \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi\Big(d^2\frac{x^2}{2} - d\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{x=0}^{d} = \pi\Big(\frac{d^4}{2} - \frac{d^4}{3}\Big) = \frac{d^4\pi}{6}.$$

Da der Mittelpunkt der Kugel ihr Schwerpunkt ist, übt sie ein Drehmoment dV aus. Da sich die Waage im Gleichgewicht befindet, ist

$$dV = \frac{d^4\pi}{6}$$

und daher

$$V = \frac{d^3\pi}{6} = \frac{8r^3\pi}{6} = \frac{4r^3\pi}{3}.$$