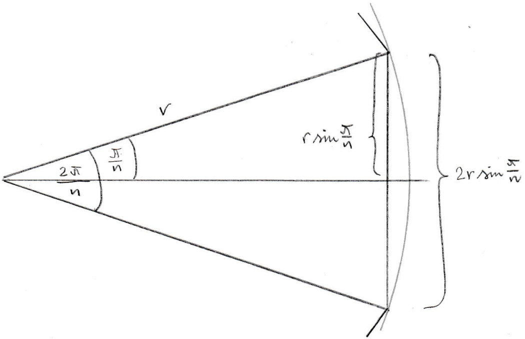
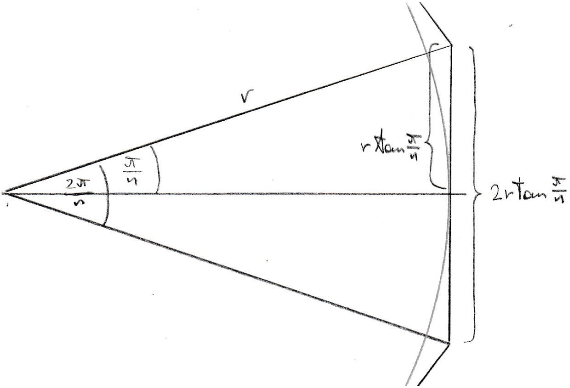
4.26 Die Kreismessung

Eine Methode, π näherungsweise zu berechnen, ist es, einem Kreis ein regelmäßiges n-eck ein- bzw. umzuschreiben:



Wie man sieht, ist der Umfang eines regelmäßigen n-ecks, das einem Kreis mit Radius r eingeschrieben wird, $2rn \sin \frac{\pi}{n}$.



Analog ist der Umfang eines regelmäßigen n-ecks, das einem Kreis mit Radius r umschrieben wird, $2rn \tan \frac{\pi}{n}$.

Offensichtlich gilt

$$2rn \sin \frac{\pi}{n} < 2r\pi < 2rn \tan \frac{\pi}{n}$$

bzw.

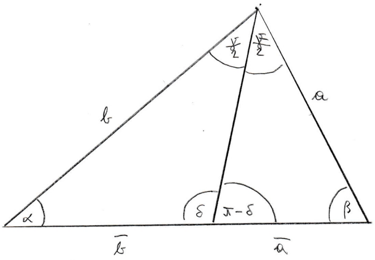
$$n \sin \frac{\pi}{n} < \pi < n \tan \frac{\pi}{n}.$$

Kann man hinreichend gute untere bzw. obere Schranken für $\sin \frac{\pi}{n}$ bzw. $\tan \frac{\pi}{n}$ angeben, so kann man daraus Schranken für π ableiten.

Das ist (aus moderner Sicht) genau das, was Archimedes für $n = 96$ tut.

Dabei benützt er (wieder aus moderner Sicht) die folgenden drei Eigenschaften:

(1) In der unten skizzierten Situation gilt $a/b = \overline{a}/\overline{b}$:



Das wird in den Elementen des Euklid (Buch VI, Prop. 3) bewiesen. Wir zeigen es mit Hilfe des Sinussatzes. Aus

$$\frac{\overline{a}}{a} = \frac{\sin(\gamma/2)}{\sin(\pi - \delta)} = \frac{\sin(\gamma/2)}{\sin \delta} = \frac{\overline{b}}{b}$$

folgt sofort die Behauptung.

(2) Für $0 < \alpha < \pi/2$ gilt

$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha},$$

denn

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

(3) Für $0 < \alpha < \pi/2$ gilt

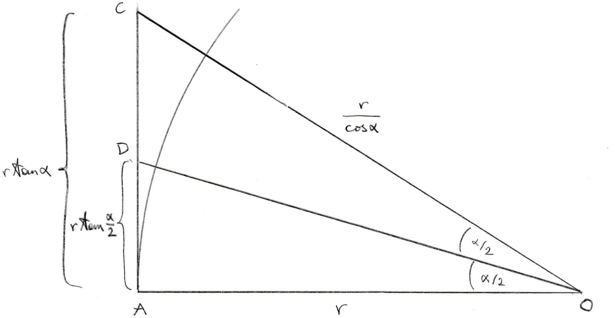
$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1},$$

denn

$$\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1 = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Archimedes verwendet natürlich keine Winkelfunktionen, sondern beweist die Relationen (2) und (3) mit anderen Mitteln (und zwar je einmal für die obere bzw. die untere Abschätzung).

Archimedes beginnt mit dem Beweis der oberen Abschätzung $\pi < 3\frac{1}{7}$.



In der obigen Skizze gelten

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{r}{r\tan\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{r}{\cos\alpha}}{r\tan\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Anwendung von (1) liefert sofort $\overline{CO}/\overline{OA} = \overline{CD}/\overline{DA}$, woraus

$$\frac{\overline{CO}+\overline{OA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OA}} + 1 = \frac{\overline{CD}}{\overline{DA}} + 1 = \frac{\overline{CD}+\overline{DA}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}$$

und daher

$$\frac{\overline{CO}+\overline{OA}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{DA}}$$

folgt. Damit ist (2) bewiesen, denn

$$\frac{\overline{CO}+\overline{OA}}{\overline{CA}} = \frac{\frac{r}{\cos\alpha}+r}{r\tan\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha}$$

und

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{DA}} = \frac{r}{r\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

Weiters ist

$$\frac{\overline{OD}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{AD}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{OA}^2}{\overline{AD}^2} + 1,$$

womit auch (3) bewiesen ist, da

$$\frac{\overline{OD}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\left(\frac{r}{\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}{(r\tan\frac{\alpha}{2})^2} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

und

$$\frac{\overline{OA}^2}{\overline{AD}^2} + 1 = \frac{r^2}{(r\tan\frac{\alpha}{2})^2} + 1 = \frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1.$$

Verfügt man über Abschätzungen

$$\frac{1}{\tan\alpha} \geq T_\alpha^+ \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin\alpha} \geq S_\alpha^+,$$

so kann man mittels (2) und (3) Abschätzungen

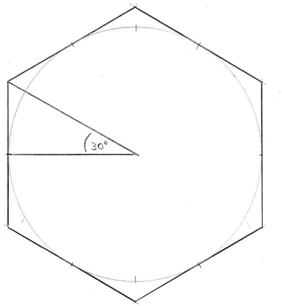
$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} \geq S_\alpha^+ + T_\alpha^+ \geq T_{\alpha/2}^+$$

und

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1} \geq \sqrt{(T_{\alpha/2}^+)^2 + 1} \geq S_{\alpha/2}^+$$

herleiten.

Diesen Schritt führt Archimedes, ausgehend von einem regelmäßigen Sechseck (d.h. $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{6}$), viermal durch.



Sein Ausgangspunkt sind die Abschätzungen

$$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} > \frac{265}{153} = T^+_{\pi/6} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2 = \frac{306}{153} = S^+_{\pi/6}.$$

Erster Schritt (Übergang zum 12-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} > S^+_{\pi/6} + T^+_{\pi/6} = \frac{571}{153} = T^+_{\pi/12}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}} > \sqrt{(T^+_{\pi/12})^2+1} = \frac{\sqrt{349450}}{153} > \frac{591\frac{1}{8}}{153} = S^+_{\pi/12}$$

Zweiter Schritt (Übergang zum 24-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{24}} > S^+_{\pi/12} + T^+_{\pi/12} = \frac{1162\frac{1}{8}}{153} = T^+_{\pi/24}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{24}} > \sqrt{(T^+_{\pi/24})^2+1} = \frac{\sqrt{1373943\frac{33}{64}}}{153} > \frac{1172\frac{1}{8}}{153} = S^+_{\pi/24}$$

Dritter Schritt (Übergang zum 48-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{48}} > S^+_{\pi/24} + T^+_{\pi/24} = \frac{2334\frac{1}{4}}{153} = T^+_{\pi/48}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{48}} > \sqrt{(T^+_{\pi/48})^2 + 1} = \frac{\sqrt{5472132\frac{1}{16}}}{153} > \frac{2339\frac{1}{4}}{153} = S^+_{\pi/48}$$

Vierter Schritt (Übergang zum 96-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{96}} > S^+_{\pi/48} + T^+_{\pi/48} = \frac{4673\frac{1}{2}}{153}$$

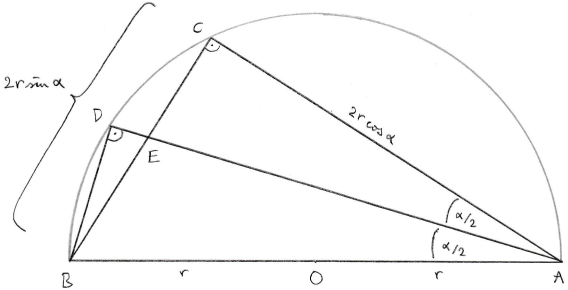
Daher ist

$$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{96 \tan \frac{\pi}{96}} > \frac{4673\frac{1}{2}}{96 \cdot 153} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}$$

und schließlich

$$\pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}.$$

Bei der unteren Abschätzung $\pi > 3\frac{10}{71}$ arbeitet Archimedes mit dem halb so großen Peripheriewinkel:



In der obigen Skizze gelten

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{2r\cos\alpha}{2r\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}} = \frac{2r}{2r\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Nach dem Satz von Thales sind $\angle BCA = \angle BDA = \angle BDE$ rechte Winkel. Nach Konstruktion ist $\angle BAD = \angle DAC (= \alpha/2)$. Da $\angle BED = \angle AEC$ ist auch $\angle EBD = \alpha/2$ und die drei Dreiecke ACE, ABD und BDE daher ähnlich. Daraus folgt

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DE}}.$$

Wendet man (1) auf das Dreieck ABC an, so folgt

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}}$$

und daraus

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BE} + \overline{CE}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Zusammen erhält man daraus

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

Damit ist erneut (2) bewiesen, denn

$$\frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2r + 2r\cos\alpha}{2r\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha}$$

und

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{2r\cos\frac{\alpha}{2}}{2r\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

Weiters ist

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2} + 1,$$

womit wieder (3) bewiesen wurde, denn

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BD}^2} = \frac{(2r)^2}{(2r\sin\frac{\alpha}{2})^2} = \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

und

$$\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BD}^2} + 1 = \frac{(2r\cos\frac{\alpha}{2})^2}{(2r\sin\frac{\alpha}{2})^2} + 1 = \frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1.$$

Verfügt man über Abschätzungen

$$\frac{1}{\tan\alpha} \leq T_\alpha^- \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin\alpha} \leq S_\alpha^-,$$

so kann man mittels (2) und (3) Abschätzungen

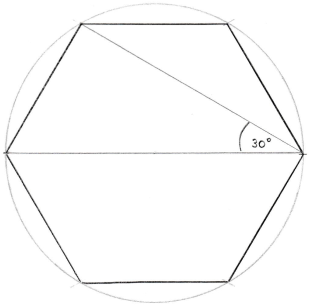
$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} \leq S_\alpha^- + T_\alpha^- \leq T_{\alpha/2}^-$$

und

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\frac{\alpha}{2}} + 1} \leq \sqrt{(T_{\alpha/2}^-)^2 + 1} \leq S_{\alpha/2}^-$$

herleiten.

Diesen Schritt führt Archimedes, wieder ausgehend von einem regelmäßigen Sechseck (d.h. $\alpha = 30^\circ$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{6}$), viermal durch.



Sein Ausgangspunkt sind nun die Abschätzungen

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} < \frac{1351}{780} = T^-_{\pi/6} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2 = \frac{1560}{780} = S^-_{\pi/6}.$$

Erster Schritt (Übergang zum 12-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}} < S^-_{\pi/6} + T^-_{\pi/6} = \frac{2911}{780} = T^-_{\pi/12}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}} < \sqrt{(T^-_{\pi/12})^2 + 1} = \frac{\sqrt{9082321}}{780} < \frac{3013\frac{3}{4}}{780} = S^-_{\pi/12}$$

Zweiter Schritt (Übergang zum 24-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{24}} < S^-_{\pi/12} + T^-_{\pi/12} = \frac{5924\frac{3}{4}}{780} = \frac{1823}{240} = T^-_{\pi/24}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{24}} < \sqrt{(T^-_{\pi/24})^2 + 1} = \frac{\sqrt{3380929}}{240} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240} = S^-_{\pi/24}$$

Dritter Schritt (Übergang zum 48-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{48}} < S^-_{\pi/24} + T^-_{\pi/24} = \frac{3661\frac{9}{11}}{240} = \frac{1007}{66} = T^-_{\pi/48}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{48}} < \sqrt{(T^-_{\pi/48})^2 + 1} = \frac{\sqrt{1018405}}{66} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66} = S^-_{\pi/48}$$

Vierter Schritt (Übergang zum 96-eck):

$$\frac{1}{\tan\frac{\pi}{96}} < S^-_{\pi/48} + T^-_{\pi/48} = \frac{2016\frac{1}{6}}{66} = T^-_{\pi/96}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{96}} < \sqrt{(T^-_{\pi/96})^2 + 1} = \frac{\sqrt{4069284\frac{1}{36}}}{66} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}$$

Daher ist

$$\frac{1}{\pi} < \frac{1}{96 \sin \frac{\pi}{96}} < \frac{2017\frac{1}{4}}{96 \cdot 66} = \frac{2017\frac{1}{4}}{6336}$$

und schließlich

$$\pi > \frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}.$$