4. Ein paar Anwendungen

Berechnung des Wochentags zu gegebenem Datum

Aus $365 \equiv 1\ (7)$ (bzw. $366 \equiv 2\ (7)$) folgt, dass sich der Wochentag zu einem gegebenen Datum von einem Jahr zum nächsten um einen Tag verschiebt (bzw. um zwei Tage, wenn wegen eines Schaltjahres ein 29. Februar dazwischen liegt).
Der 27. Juni 2022 ist ein Montag. Daher ist der 27. Juni 2023 ein Dienstag und der 27. Juni 2024 ein Donnerstag (da 2024 ein Schaltjahr ist).
Dabei muss man berücksichtigen:

- Ein Jahr ist ein Schaltjahr wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist (also z. B. ..., 2004, 2008, 2012, 2016, 2020, 2024, 2028, ...)
  Ausgenommen davon sind Jahreszahlen, die durch 100 teilbar sind.
  Ausgenommen von der Ausnahme sind Jahreszahlen, die durch 400 teilbar sind (z. B. war 2000 ein Schaltjahr, aber 2100 wird kein Schaltjahr sein.)
- Diese Berechnung ist nur sinnvoll für Daten nach der Einführung des Gregorianischen Kalenders. Dieser wurde 1582 von Papst Gregor XIII verordnet, in verschiedenen Ländern aber erst später eingeführt. (z. B. in England erst 1752).

Beispiel: Welcher Wochentag war der 1. April 2000? Der 1. April 2022 war ein Freitag, das Jahr 2000 war 22 Jahre früher, darunter waren die fünf Schaltjahre 2004, 2008, 2012, 2016 und 2020. (Das Jahr 2000 war ein Schaltjahr, muss aber nicht berücksichtigt werden, da der 29.2.2000 nicht in den Zeitraum zwischen 1.4.2000 und 1.4.2022 fällt.) Der Wochentag muss also um 27 Tage (zurück) verschoben werden. Wegen $-27 \equiv 1\ (7)$ war der 1. April 2000 ein Samstag.

Prüfziffern

Prüfziffern werden verwendet, um die Korrektheit von Daten zu gewährleisten (z. B. von Kontonummern, Kreditkartennummern, Sozialversicherungsnummern, ISBN oder Serien-nummern von Geldscheinen). Ziel ist es, möglichst viele (von Menschen) gemachte Fehler beim Abtippen (oder Abschreiben) zu erkennen. Die häufigsten Fehler sind:

- Vertippen (oder Verschreiben) bei einer einzelnen Ziffer (49% der Fehler)
- Weglassen einer Ziffer (27% der Fehler)
- Zahlendreher (9% der Fehler)

Eine einfache Möglichkeit ist die Verwendung der Quersumme. Man kann einer Zahl z. B. eine Ziffer hinzufügen, derart dass die Quersumme durch 10 teilbar ist. Ist die Zahl z. B. 2347, so ist die Quersumme $2+3+4+7 = 16$. Fügt man als Prüfziffer 4 hinzu, also 23474, so ist die Quersumme $2+3+4+7+4 = 20$

durch 10 teilbar (bzw. $20 \equiv 0 \ (10)$).

- Einzelne falsche Ziffern werden dadurch entdeckt. Schreibt man z.B. irrtümlich 5 statt 3 (als 25474 statt 23474), so ist $2+5+4+7+4 = 22$ nicht durch 10 teilbar (bzw. $22 \equiv 2 \not\equiv 0 \ (10)$).
- Eine weggelassene Ziffer wird erkannt, außer es wird eine Null weggelassen. (Allerdings kann man leicht überprüfen, ob die Anzahl der Stellen korrekt ist.)
- Zahlendreher werden nicht entdeckt. Z.B. haben 23474 und 32474 die selbe Quersumme.

Aus diesem Grund ist es besser, gewichtete Quersummen zu verwenden.
Als Beispiel betrachten wir ISBN (International Standard Book Number), das zur eindeutigen Kennzeichnung von Büchern verwendet wird.
Seit 2007 wird das ISBN-13-System verwendet. Jeder ISBN-13-Code besteht aus 13 Ziffern. Dabei enthalten die ersten 12 Ziffern verschiedene Informationen (wie z.B. den Verlag). Die 13. Ziffer ist die Prüfziffer und wird folgendermaßen bestimmt: Hat der ISBN-Code die Ziffern $a_1, a_2, \dots, a_{13}$, so gilt

$$a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + a_{13} \equiv 0 \ (10)$$

oder kurz

$$\sum_{\substack{1 \le j \le 13 \\ 2 \nmid j}} a_j + 3 \sum_{\substack{1 \le j \le 13 \\ 2 \mid j}} a_j \equiv 0 \ (10),$$

d.h. jede 2. Ziffer wird mit Gewicht 3 versehen. Z.B. hat das Buch „Zahlen, Formeln, Gleichungen" von Albrecht Beutelspacher den ISBN-Code 978-3-658-16105-7, den wir überprüfen:

$$9+3\cdot 7+8+3\cdot 3+6+3\cdot 5+8+3\cdot 1+6+3\cdot 1+0+3\cdot 5+7 = 110 \equiv 0 \ (10)$$

oder (gekürzter)

$$9+3\cdot 7+8+3\cdot 3+6+3\cdot 5+8+3\cdot 1+6+3\cdot 1+0+3\cdot 5+7$$
$$\equiv -1+1-2-1-4+5-2+3-4+3+5-3 \equiv 0 \ (10)$$

- Einzelne falsche Ziffern werden entdeckt. Sind $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ so gelten $a \equiv b \ (10) \Rightarrow a = b$ bzw. $3a \equiv 3b \ (10) \xrightarrow{\text{Satz 39(v)}} a \equiv b \ (10) \Rightarrow a = b$. Ist also $a \neq b$, so ist $a \not\equiv b \ (10)$ bzw. $3a \not\equiv 3b \ (10)$.
- Die meisten (aber nicht alle) Ziffernreher werden entdeckt. Sind wieder $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$, so ist $3a + b \equiv a + 3b \ (10) \Leftrightarrow 2a \equiv 2b \ (10) \xrightarrow{\text{Satz 39(v)}} a \equiv b \ (5)$.

D.h. das Vertauschen benachbarter Ziffern, die sich um 5 unterscheiden, wird nicht erkannt (d.h. $0 \leftrightarrow 5$, $1 \leftrightarrow 6$, $2 \leftrightarrow 7$, $3 \leftrightarrow 8$, $4 \leftrightarrow 9$). Wird z.B. beim ISBN-Code des Buchs von Bartholdy/Bolza die Ziffer 6 im Block 16105 irrtümlich mit einer der benachbarten Ziffern vertauscht (d.h. 61105 oder 11605), so wird das nicht erkannt, da $3 \cdot 6 + 1 = 19 \equiv 9 = 6 + 3 \cdot 1 \ (10)$.

Tatsächlich war das zuvor verwendete ISBN-10-System in dieser Hinsicht sicherer. Jeder ISBN-10-Code bestand aus einer Folge von 10 Ziffern, wobei die 10. Ziffer die Prüfziffer war. Bestand der Code aus den Ziffern $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, so musste die Bedingung

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + a_{10} \equiv 0 \ (11)$$

oder kurz

$$\sum_{j=1}^{10} (11-j)\, a_j \equiv 0 \ (11)$$

erfüllt sein, d.h. jede Ziffer hatte ein anderes Gewicht. Da es sich um Kongruenzen modulo 11 handelt, ist es möglich, dass $a_{10} = 10$ sein muss, um die Bedingung zu erfüllen. In diesem Fall verwendete man X als 10. Ziffer (was man als „römisches 10" lesen kann). Z.B. hat das Buch „Introduction to Cryptography" von Johannes A. Buchmann den ISBN-Code 0-387-21156-X, den wir überprüfen:

$$10 \cdot 0 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 10 = 198 = 11 \cdot 18 \equiv 0 \ (11)$$

oder (geschickter)

$$10 \cdot 0 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 8 + 7 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 10$$
$$\equiv \quad -2 + 5 + 7 + 5 + 4 + 4 + X - X \equiv 0 \ (11)$$

- Einzelne falsche Ziffern werden entdeckt. Sind $a, b \in \{0, 1, \dots, 9, 10\}$ und $q \in \{1, 2, \dots, 10\}$, so gilt $qa \equiv qb \ (11) \xrightarrow{\text{Satz 39(v)}} a \equiv b \ (11) \Rightarrow a = b$. Ist also $a \neq b$, so ist $qa \not\equiv qb \ (11)$.

- Alle Ziffernpaare werden entdeckt. Sind $a, b \in \{0, 1, \dots, 10\}$ und $q \in \{1, 2, \dots, 9\}$, so ist $(q+1)a + qb \equiv (q+1)b + qa \ (11) \Rightarrow a \equiv b \ (11) \Rightarrow a = b$. Ist also $a \neq b$, so ist $(q+1)a + qb \not\equiv (q+1)b + qa \ (11)$.

27.6.2022