Proseminar Analysis 1, SS 2006

Christoph Baxa

Beweisen Sie mit Hilfe der Axiome der reellen Zahlen bzw. den in der Vorlesung daraus abgeleiteten Folgerungen:

15) a) Das Einselement $1 (\in \mathbb{R})$ ist eindeutig bestimmt.
b) Zu gegebenem $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist das multiplikative Inverse $\frac{1}{a}$ eindeutig bestimmt.

16) Zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodaß $a \cdot x = b$.

17) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.$$

18) Für alle $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\frac{1}{a \cdot b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$.

19) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

20) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.

21) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

22) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, c, d \neq 0$ gilt

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

23) Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ gilt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$.

24) Beweisen Sie, daß $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist

25) Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:
a) Wenn $a, b > 0$ dann $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.
b) Wenn $a, b < 0$ dann $a + b < 0$ und $a \cdot b > 0$.

26) Beweisen Sie: Wenn $0 < a < b$ dann $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

27) Beweisen Sie für $a, b, c \in \mathbb{R}$:

a) Wenn $a \leq b$ und $b \leq c$ dann $a \leq c$.
b) Wenn $a \leq b$ und $c > 0$ dann $a \cdot c \leq b \cdot c$.
c) Wenn $a \leq b$ und $c < 0$ dann $a \cdot c \geq b \cdot c$.
d) Wenn $a \leq b$ und $b \leq a$ dann $a = b$.

28) Beweisen Sie, daß man auf $\mathbb{F}_2$ keine Relation $<$ definieren kann, derart daß die Axiome (4.1) – (4.4) erfüllt sind.

29) Beweisen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ gilt, daß $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.

30) Beweisen Sie, daß für alle $a, b \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$ gilt.

31) Beweisen Sie: Wenn $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ dann $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$.

32) Beweisen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\text{a) } \max\{a, b\} = \frac{a + b + |b - a|}{2} \qquad \text{b) } \min\{a, b\} = \frac{a + b - |b - a|}{2}$$

33) Sind die folgenden Mengen nach unten bzw. oben beschränkt? Wenn ja, was ist ihr Infimum bzw. Supremum? Handelt es sich dabei um ein Minimum bzw. Maximum?

a) $(-1, 1)$ b) $[-3, 2)$ c) $(-3, 2) \cap [1, +\infty)$ d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\}$ e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}\}$

34) Es sei $a < b$. Beweisen Sie, daß $(a, b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \varnothing$. (D.h. die Irrationalzahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$.)

35) a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n = [n, +\infty)$. Beweisen Sie $I_{n+1} \subseteq I_n$ für $n \geq 1$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$.
b) Ebenso für $I_n = (0, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$.
Widersprechen diese Ergebnisse dem Intervallschachtelungsprinzip?

36) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $M \neq \varnothing$. Beweisen Sie, daß $s \in \mathbb{R}$ genau dann Infimum von M ist wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$\text{(i)} \quad s \leq x \quad \forall x \in M \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in M: \quad x < s + \varepsilon$$

37) Es seien $A = [3, 11]$, $B = \{-1, 2, 18\}$, $C = [0, 1) \cup \{2\}$ und $D = (-\infty, -100]$. Berechnen Sie $2A$, $-2B$, $3C$, $-3D$, $A + B$, $A + C$, $A + D$, $B + C$, $B + D$ und $C + C$.

38) Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ und $M, N \neq \varnothing$. Beweisen Sie: Wenn M und N nach unten beschränkt sind, ist auch $M + N$ nach unten beschränkt und es gilt

$$\inf(M+N) = \inf M + \inf N.$$

39) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \varnothing$ nach unten beschränkt und $c < 0$. Beweisen Sie

$$\sup(cM) = c \inf M.$$

40) Es seien $M, N \subseteq \mathbb{R}$ und $M, N \neq \varnothing$. Beweisen Sie: Wenn M und N nach oben beschränkt sind, ist auch $M \cup N$ nach oben beschränkt und es gilt

$$\sup(M \cup N) = \max\{\sup M, \sup N\}.$$

41) Beweisen Sie für $k, n \in \mathbb{Z}$:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für $0 \leq k \leq n$ b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für $0 \leq k < n$

Geben Sie für beide Aussagen einen Beweis mit Hilfe der Definition der Binomialkoeffizienten und einen mittels ihrer kombinatorischen Interpretation.

42) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$,

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$.

Können Sie eine kombinatorische Interpretation dieser Identitäten geben?

43) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

44) Beweisen Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist.

45) Es sei $a > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $r < s$. Beweisen Sie, daß $a^r > a^s \iff a < 1$.

46) Es sei $a > 0$ und $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $p < n$. Beweisen Sie

$$\sqrt[n]{a^p} \leq 1 + \frac{p}{n}(a-1).$$

47) Zeigen Sie (für $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$), daß

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leq n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

48) Beweisen Sie für Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) Die Funktionen $p + q$ und $p \cdot q$ sind ebenfalls Polynomfunktionen.

b) $\mathrm{grad}(p \cdot q) = \mathrm{grad}\, p + \mathrm{grad}\, q$.

c) $\mathrm{grad}(p + q) \leq \max\{\mathrm{grad}\, p, \mathrm{grad}\, q\}$

49) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß durch

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{(x - a_0) \cdots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \cdots (x - a_n)}{(a_k - a_0) \cdots (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \cdots (a_k - a_n)}$$

eine Polynom mit $\mathrm{grad}\, p \leq n$, gegeben ist, das $p(a_k) = b_k$ erfüllt (für $0 \leq k \leq n$). Bemerkung: Dieses Polynom wird Lagrangesches Interpolationspolynom genannt.

50) Bestimmen Sie Eigenschaften und Graphen der Funktion $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$.

51) Beweisen Sie: Die einzige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sowohl gerade als auch ungerade ist, ist die konstante Funktion mit Wert 0, d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

52) Beweisen Sie: Jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ läßt sich auf eindeutige Weise als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben. Hinweis: Verwenden Sie

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \frac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

53) Beweisen Sie, daß $(0, 1]$ und $(0, 1)$ gleichmächtig sind, d.h. finden Sie eine bijektive Abbildung $f : (0, 1] \to (0, 1)$.

54) Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ für

a) $a_n = \dfrac{4n^4 - n + 2}{2n^4 + 2n^2 + n}$ b) $a_n = \dfrac{n^3 + n}{4n^4 + 3n^3 + 2n^2 + n + 1}$

55) Es seien $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_0, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{R}$, $a_p \neq 0$ und $b_q \neq 0$. Beweisen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} a_p / b_q & \text{falls } p = q, \\ 0 & \text{falls } p < q. \end{cases}$$

56) Berechnen Sie:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

57) Es sei $p \in \mathbb{N}$. Berechen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{n^p}$. Was können Sie aus den Ergebnissen über den Wert von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ folgern, wenn die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ für fast alle n die Relation $n^{-p} < a_n < n^p$ erfüllt?

58) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$ dann gilt auch $a \geq 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

59) Beweisen Sie:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \tfrac{1}{2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right) = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \sqrt{\left(1-\tfrac{a}{n}\right)\left(1-\tfrac{b}{n}\right)}\right) = \tfrac{a+b}{2} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

60) Beweisen Sie: Wenn $0 \leq a \leq b \leq c$ dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = c$. Geben Sie eine analoge Aussage für p Zahlen $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_p$ an (und beweisen Sie sie).

61) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und p eine Polynomfunktion ist, dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} p(a_n) = p(a).$$

62) Beweisen Sie: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ dann gelten

$$\lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{a, b\} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \min\{a_n, b_n\} = \min\{a, b\}.$$

63) Beweisen Sie: Wenn $a_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$ und es ein $q \in (0,1)$ gibt, derart daß $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für fast alle n, dann ist $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge.

64) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}$ beliebig fest gewählt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

65) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

66) Es sei $\alpha > 0$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei folgendermaßen iterativ definiert: $a_1 := \sqrt{\alpha}$, $a_2 := \sqrt{\alpha + a_1}$, allgemein $a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n}$ für $n \geq 1$. Beweisen Sie mit Induktion, daß die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton wächst und durch $1+\sqrt{\alpha}$ nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie zum Schluß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

67) Beweisen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

eine Cauchyfolge (und daher konvergent) ist.

68) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (wobei in Teil b) $|q| < 1$ gelten soll):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\Big(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\Big)$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1) + nq + (n-1)q^2 + \cdots + 2q^{n-1} + q^n}{n}$

69) Es seien $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) $a^x/a^y = a^{x-y}$ b) $(ab)^x = a^x b^x$ c) $a^x/b^x = (a/b)^x$

70) Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft $a^b \in \mathbb{Q}$. Hinweis: Verwenden Sie $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

71) Bestimmen Sie $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$:

a) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \geq 0, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \geq 0, \\ 2 & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \geq 0. \end{cases}$

72) Finden Sie eine Folge, bei der die Menge der Häufungspunkte ganz $\mathbb{R}$ ist.

73) Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ beschränkte Folgen. Beweisen Sie:

a) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ für alle $\alpha > 0$,

b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

c) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

d) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ wenn die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Geben Sie bei b) und c) je ein Beispiel an, für das die strenge Ungleichung gilt. Hinweis zu Teil c): Wenden Sie Teil b) auf $a_n = (a_n + b_n) + (-b_n)$ an.

74) Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$ (mit $p \in \mathbb{N}$) b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^r = +\infty$ (mit $r > 0$ rational)

75) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ sei konvergent. Beweisen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c_n) = +\infty$

76) Es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \alpha > 0, \\ -\infty & \text{falls } \alpha < 0. \end{cases}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = +\infty$

77) Berechnen Sie (soferne sie existieren) die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{2 - x} - \dfrac{12}{8 - x^3} \right)$

78) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{für } x \leq 2, \\ 3x - 1 & \text{für } x > 2. \end{cases}$$

Geben Sie einen detailierten Beweis dafür, daß f im Punkt 2 stetig ist (d.h. argumentieren Sie mit $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$).

79) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die im Punkt 0 stetig ist, in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber unstetig ist.

80) Beweisen Sie: Wenn die Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig ist, besitzt sie einen Fixpunkt $\xi \in [a, b]$. (Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $x \mapsto f(x) - x$.) Geben Sie Beispiele für stetige Funktionen $f : I \to I$ ohne Fixpunkt an, wobei I ein Intervall, aber entweder nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt ist.

81) Beweisen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

82) Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und $f(D) \subseteq E$. Beweisen Sie:

a) Wenn f und g gleichmäßig stetig sind, dann ist auch $g \circ f$ gleichmäßig stetig.

a) Wenn f und g Lipschitz-stetig sind, dann ist auch $g \circ f$ Lipschitz-stetig.