Proseminar Analysis 3, SS 2007

Christoph Baxa

183) Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Konvergiert diese Funktionenfolge auf $\mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig? Konvergieren $\frac{1}{n} f_n$ bzw. f_n^2 auf $\mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig?

184) Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Zeigen Sie: Diese Funktionenfolge ist gleichmäßig konvergent, wenn man f_n auf $[0,q]$ einschränkt (mit $0 < q < 1$), nicht aber auf $[0,1]$.

185) Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Zeigen Sie: Diese Funktionenfolge konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ und sie konvergiert gleichmäßig auf $[-q,q]$ (wobei $0 < q < 1$). Konvergiert sie gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$?

186) Zeigen Sie: Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ ist auf $(-1,1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent.

187) Zeigen Sie: Die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ ist für $\alpha > 1$ auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent.

188) Es sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$. Zeigen Sie:
a) Diese Funktionenfolge ist punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent. Hinweis: Zeigen Sie, daß die Funktion f_n ihr Maximum bei $\frac{1}{n+1}$ annimmt und daß

$$\max_{0 \le x \le 1} f_n(x) = f_n\left(\tfrac{1}{n+1}\right) \to \tfrac{1}{e} \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

b) $\lim\limits_{x \to 0+} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to 0+} f_n(x)$
c) Die Grenzfunktion $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ ist auf $[0,1]$ stetig.
d) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\big)\,dx$

189) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $B(D)$ der Vektorraum $B(D) = \{f : D \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist beschränkt}\}$. Für $f \in B(D)$ definiert man die *Supremumsnorm* $\|f\|_\infty := \sup_{x \in D} |f(x)|$.
Zeigen Sie: $\|f\|_\infty \ge 0$ für alle $f \in B(D)$,
$\|f\|_\infty = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ (d.h. $f(x) = 0$ für alle $x \in D$),
$\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $f \in B(D)$,
$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ für alle $f, g \in B(D)$ (Dreiecksungleichung).
Damit ist gezeigt, daß $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Vektorraum $B(D)$ ist.

190) a) Es seien $f_n, f \in B(D)$. Zeigen Sie: Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.
b) Formulieren Sie das Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz mit Hilfe der Supremumsnorm.

191) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:
a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{2^n}$ b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$ c) $\sum_{n=1}^\infty \big(1-(-2)^n\big)x^n$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n}x^n$

192) Zeigen Sie: Ist $a_n \neq 0$ für fast alle n, dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-a)^n$ gleich $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, falls dieser Limes existiert (wobei auch der Wert ∞ zugelassen ist).

193) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:
a) $\sum_{n=1}^\infty (n^4-4n^3)x^n$ b) $\sum_{n=0}^\infty \binom{2n}{n}x^n$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}x^n$

194) Zeigen Sie $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{2^{n+1}}$ für $|x|<2$.

195) Bestimmen Sie Konvergenzintervall und Grenzwert der folgenden Potenzreihen:
a) $\sum_{n=0}^\infty nx^n$ b) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n nx^n$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n}x^n$ d) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{(n+3)!}$

196) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $a>0$:
a) $a^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{(\log a)^n}{n!}x^n$ b) $\sinh(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ c) $\cosh(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

197) Zeigen Sie mittels eines Produkts von Potenzreihen: Hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$ Konvergenzradius R, dann gilt $\frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^\infty a_nx^n = \sum_{n=0}^\infty (a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ für alle $x\in\mathbb{R}$ mit $|x|<\min\{1,R\}$.

198) Zeigen Sie mittels Koeffizientenvergleichs

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1} + \cdots + \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ und $n\geq 0$ ganz. Leiten Sie daraus ab, daß

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

199) Zeigen Sie $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n+k}{n}x^n$ für $|x|<1$ und $k\in\{0,1,2,3,\dots\}$.

200) Beweisen Sie

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Bionomialreihe mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $-x^2$ statt x.

201) Beweisen Sie für die folgende Erweiterung der Binomialkoeffizienten (mit $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $k \geq 0$ gelten:

$$\text{a)} \quad (k+1)\binom{\alpha}{k+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{k} \qquad \text{b)} \quad \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

202) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, beides oder keines von beidem sind:

a) $(-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$ b) $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

203) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen, abgeschlossen, beides oder keines von beidem sind:

a) $\left\{(1+\frac{1}{n})^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ b) $\{e\} \cup \left\{(1+\frac{1}{n})^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+\frac{1}{2}]$

204) Schreiben Sie $\{0\} \cup \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt (unendlich vieler) abgeschlossener Mengen.

205) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$, sowie $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in B_r(\mathbf{x})$. Zeigen Sie, daß die "offene Kugel mit Löchern" $B_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ offen ist.

206) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: M ist genau dann beschränkt, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodaß $M \subseteq [-N, N]^k$.

207) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: M ist genau dann beschränkt, wenn es $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und ein $r > 0$ gibt, sodaß $M \subseteq B_r(\mathbf{x})$.

208) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$. Geben Sie eine offene Überdeckung von $B_r(\mathbf{x})$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt.

209) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie ausgehend von der Definition der Kompaktheit: Wenn K kompakt ist, ist es beschränkt. Hinweis: Betrachten Sie $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(\mathbf{0})$.

210) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie ausgehend von der Definition der Kompaktheit: Wenn K kompakt ist, ist es abgeschlossen. Hinweis: Angenommen, K wäre nicht abgeschlossen. Dann gäbe es eine Folge $(\mathbf{a}_n)_{n\geq 1}$ in K, sodaß $\mathbf{a} := \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n \notin K$. Definieren Sie nun $U_m := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > \frac{1}{m}\}$. Für $m \geq 1$ ist U_m offen (warum?) und es gelten $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq \cdots$ und $\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m = \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{a}\}$, insbesondere ist $(U_m)_{m\geq 1}$ eine offene Überdeckung von K. Daraus ergibt sich ein Widerspruch.

211) Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) K ist kompakt,

(ii) wenn A_i abgeschlossen ist für alle $i \in I$ und $K \cap \bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$, dann gibt es $i_1, \ldots, i_m \in I$, sodaß $K \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m} = \varnothing$.

Bemerkung: Die Charakterisierung (ii) kompakter Mengen wird als "endliche Durchschnittseigenschaft" bezeichnet.

212) Zeigen Sie mittels der Charakterisierung (ii) kompakter Mengen aus dem vorangegangenen Beispiel, daß die folgenden Mengen nicht kompakt sind:

a) $[0, 1)\ (\subseteq \mathbb{R})$ b) $[0, +\infty)\ (\subseteq \mathbb{R})$ c) $\mathbb{R}^k$ d) $B_R(\mathbf{0})\ (\subseteq \mathbb{R}^k)$ (mit $R > 0$)

213) Man bestimme den Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ der Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und den Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$:

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2+2}$ b) $f(x, y) = \frac{e^{xy}}{x+1}$ c) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ d) $f(x, y) = \frac{e^{xy}-1}{x}$

214) Es sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq 0\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x, y) := \frac{x-y}{x+y}$ gegeben. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0} f(x, y)\bigr) = 1 \text{ und } \lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0} f(x, y)\bigr) = -1.$$

Existiert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

215) Es sei $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to 0}\bigl(\lim_{y\to 0} f(x, y)\bigr) = \lim_{y\to 0}\bigl(\lim_{x\to 0} f(x, y)\bigr) = 0,$$

aber $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existiert nicht. Hinweis: Was passiert für $x = y$?

216) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} x\sin(\frac{1}{y}) & \text{für } y \neq 0 \\ 0 & \text{für } y = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, aber

$$\lim_{x\to 0}\big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\big) \neq \lim_{y\to 0}\big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\big).$$

217) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

gegeben. Geben Sie offene (bzw. abgeschlossene) Mengen an, deren Urbild unter f bzw. g nicht offen (bzw. abgeschlossen) ist.

218) Zeigen Sie, daß die Menge A abgeschlossen ist, indem sie sie als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung darstellen.

a) $A = \overline{B_r(\mathbf{x})}$ (mit $r > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$) b) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

219) Beweisen Sie nochmals den folgenden Satz aus der Vorlesung: Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^k$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}^l$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig. Modifizieren Sie zu diesem Zweck den Beweis des Spezialfalls $k = l = 1$ und $K = [a,b]$ aus Analysis 1 (Satz 3.16+i).

220) Beweisen Sie das folgende Cauchykriterium für Funktionenfolgen in mehreren Dimensionen: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, $f_n : D \to \mathbb{R}^l$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $f : D \to \mathbb{R}^l$ seien Funktionen. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$,

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}$, sodaß $\forall n, m > N \ \ \forall \mathbf{x} \in D : \|f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})\| < \varepsilon$.

Hinweis: Der Beweis kann analog zum Fall $k = l = 1$ aus Analysis 2 geführt werden.

221) Beweisen Sie: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$, ξ sei Häufungspunkt von D und $f_n : D \to \mathbb{R}^l$ (mit $n \in \mathbb{N}$) und $f : D \to \mathbb{R}^l$ seien Funktionen mit der Eigenschaft, daß $f_n \to f$ gleichmäßig für $n \to \infty$. Weiters möge $\alpha_n := \lim_{\mathbf{x}\to\xi} f_n(\mathbf{x})$ für alle $n \geq 1$ existieren. Dann existieren $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ und $\lim_{\mathbf{x}\to\xi} f(\mathbf{x})$ und stimmen überein, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{\mathbf{x}\to\xi} f_n(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\xi} \lim_{n\to\infty} f_n(\mathbf{x}).$$

Hinweis: Der Beweis kann analog zum Fall $k = l = 1$ aus Analysis 2 geführt werden.

222) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktionen a) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{xy}$ b) $f(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$ c) $f(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}$ (mit $z \neq 0$)

223) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

224) Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist durch $PV = cT$ gegeben. Dabei bezeichnen P den Druck, V das Volumen und T die Temperatur, c ist eine Konstante. Zeigen Sie

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

(und nicht 1, wie man durch "Kürzen" erhalten würde).

225) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\mathbf{a} \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ mögen in $\mathbf{a}$ einen Gradienten besitzen. Dann besitzen auch $f+g$, αf (mit $\alpha \in \mathbb{R}$), fg und $\frac{f}{g}$ (soferne $g(\mathbf{a}) \neq 0$) dort einen Gradienten und es gilt dort:

a) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$ b) $\operatorname{grad}(\alpha f) = \alpha \operatorname{grad} f$
c) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$ d) $\operatorname{grad}(\frac{f}{g}) = \frac{1}{g^2}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g)$

226) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische $n \times n$ – Matrix, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i,j \leq n$. Beweisen Sie, daß für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$, gilt, daß $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$.

227) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{u}$, soferne sie existiert:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $\mathbf{x} = (1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
b) $f(x,y) = \sin(xy)$, $\mathbf{x} = (1,0)$, $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$
c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{x} = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$

228) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Zeigen Sie: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, und zwar auch für $x = y = 0$. Daraus folgt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

229) Berechnen Sie die Ableitung $Df(x,y)$ bzw. $Df(x,y,z)$ für die folgenden Funktionen:
a) $f(x,y) = (x^2y, e^{-xy})$ b) $f(x,y,z) = \big(e^{xy}, z\sin(x), y\cos(x)\big)$ c) $f(x,y) = (x^3y^2, xy, y^4)$

230) Beweisen Sie direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit: Ist $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ eine lineare Abbildung, so ist L differenzierbar. Was ist die Jacobische Matrix von L?

231) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^l$ mit $f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_l(\mathbf{x})\big)$. Beweisen Sie, daß f ist genau dann in $\mathbf{a}$ differenzierbar ist, wenn die Abbildungen $f_1, \ldots, f_l : U \to \mathbb{R}$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar sind.

232) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Beweisen Sie, daß f in $(0,0)$ differenzierbar ist, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$ aber unstetig sind.

233) Es sei $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie

$$\|L\| = \sup\Big\{\|L(\mathbf{x})\| \;\Big|\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \|\mathbf{x}\| = 1\Big\} = \max\Big\{\|L(\mathbf{x})\| \;\Big|\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k, \|\mathbf{x}\| = 1\Big\}.$$

234) Es seien $L, M : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

a) $\|L\| = 0$ gilt genau dann, wenn L die Nullabbildung ist (d.h. $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$),
b) $\|\alpha L\| = |\alpha|\,\|L\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,
c) $\|L + M\| \leq \|L\| + \|M\|$.

235) Es sei $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$ und $g(u,v) = (u+v, uv^2)$. Berechnen Sie die Ableitung $D(g \circ f)(1,1)$ mit Hilfe der Kettenregel und direkt.

236) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in U$ und f und g seien in $\mathbf{a}$ differenzierbar.
a) Zeigen Sie, daß auch $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar ist und die Matrixdarstellung von $D(f \cdot g)(\mathbf{a})$ bezüglich der Standardbasen gegeben ist durch

$$f(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big) + g(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big).$$

236) b) Ist $g(\mathbf{a}) \neq 0$, so ist auch $f/g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar und die Matrixdarstellung von $D(f/g)(\mathbf{a})$ bezüglich der Standardbasen ist gegeben durch

$$\frac{1}{g(\mathbf{a})^2}\Big(g(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big) - f(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big)\Big).$$

Hinweis: Es geht in diesem Beispiel nicht so sehr darum, die Jacobischen Matrizen der Abbildungen $f \cdot g$ bzw. f/g zu berechnen, sondern es soll auch gezeigt werden, daß diese Abbildungen in $\mathbf{a}$ differenzierbar sind. Das kann man direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit herleiten, man kann aber auch die Kettenregel benützen und z.B. in a) die Abbildung $f \cdot g$ als Zusammensetzung der beiden Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \big(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\big)$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ auffassen.

237) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}^l$, $a \in I$ und f und g seien in a differenzierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch die Abbildung $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), g(x)\rangle = \sum_{j=1}^{l} f_j(x) g_j(x)$ in a differenzierbar und ihre Ableitung ist gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{l} f_j(a) g_j'(a) + \sum_{j=1}^{l} f_j'(a) g_j(a).$$

Hinweis: Auch in diesem Beispiel ist der Beweis der Differenzierbarkeit wichtiger als die Formel für die Ableitung.

238) Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \sin(xy)$ und $g(x, y) := e^{x+y}$. Berechnen Sie Df und Dg und daraus mit Hilfe der Rechenregeln für die Ableitung:

a) $D(f + g)$ b) $D(2f)$ c) $D(f \cdot g)$ d) $D(f/g)$

239) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn sie $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$ für alle $t > 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ erfüllt. Zeigen Sie den folgenden *Satz von Euler:* Ist f homogen vom Grad α und differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\, x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, x_k = \alpha f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: Es sei $g(t) = f(t\mathbf{x})$ für festes $\mathbf{x}$ und $t > 0$. Berechnen Sie $g'(1)$ auf zwei Arten.

240) Berechnen Sie nochmals die Richtungsableitungen aus Bsp. 227), diesmal mit Hilfe von Satz 10.1 aus der Vorlesung, d.h. mittels $\operatorname{grad} f$.

241) Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion f im Punkt $\mathbf{a}$ bis zu den Gliedern 2. Ordnung für:

a) $f(x,y) = (x+y)^2$, $\mathbf{a} = (0,0)$ b) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, $\mathbf{a} = (1,0)$
c) $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^{-1}$, $\mathbf{a} = (0,0)$ d) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, $\mathbf{a} = (0,0)$
e) $f(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy)$, $\mathbf{a} = (0,0)$

242) Die quadratische Form $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$Q(x,y) := (x\ \ y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Beweisen Sie: Wenn $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 < 0$ gilt, ist Q indefinit.

243) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$),
b) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$),
c) $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ (mit $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$),
d) $f(x,y) = 1/y - 1/x - 4x + y$ (mit $x, y \neq 0$),
e) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$).

244) Gegeben seien die n Punkte $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^k$. Beweisen Sie, daß die Funktion $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_n\|^2$ bei $\mathbf{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$ ein Minimum annimmt.

245) Beweisen Sie: Wenn $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dann gilt $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n\sum_{i=1}^n x_i^2$, wobei Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$ gilt. Hinweis: Cauchy – Schwarzsche Ungleichung.

246) Gegeben seien n Punktepaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, die man durch Messungen erhalten hat und für die von einer Theorie eine lineare Beziehung $y = kx + d$ voraussagt wird. Da die Messungen fehlerbehaftet sind, sucht man eine *Ausgleichsgerade*, d.h. Werte für k und d, durch die der Fehler möglichst klein wird. Zu diesem Zweck betrachtet man die Funktion $f(k,d) := \sum_{i=1}^n (kx_i + d - y_i)^2$ und untersucht, für welche Werte von k und d sie ihr Minimum annimmt.(Diese Vorgangsweise wird *Methode der kleinsten Quadrate* genannt.) Beweisen Sie, daß man (unter einer vernünftigen Zusatzannahme – nämlich welcher?) auf diese Weise folgende Werte erhält:

$$k = \frac{n\sum_{i=1}^n x_iy_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_iy_i}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

247) Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := x + y$. Zeigen Sie, daß f bei $(1,1)$ ein striktes lokales Maximum besitzt, aber $\operatorname{grad} f(1,1) \neq (0,0)$ gilt.

248) Berechnen Sie die totale Variation der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im Kopf und überprüfen Sie das Ergebnis mittels der Formel $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$.

a) $[a, b] = [-2, 2]$, $f(x) = x^2$ b) $[a, b] = [0, 2\pi]$, $f(x) = \cos x$ c) $[a, b] = [1, e]$, $f(x) = x \log x$

249) Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so ist $V_a^b(f) = |f(a) - f(b)|$.

250) Berechnen Sie die totale Variation einer Treppenfunktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$.

251) Zeigen Sie: Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation und $c \in \mathbb{R}$, dann gelten

$$V_a^b(cf) \leq |c| V_a^b(f) \qquad \text{und} \qquad V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g).$$

Folgern Sie daraus, daß $BV\big([a, b]\big) = \big\{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist von beschränkter Variation}\big\}$ ein Vektorraum ist.

252) Zeigen Sie: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, dann ist f beschränkt.

253) Zeigen Sie: Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation, dann gilt

$$V_a^b(f \cdot g) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f).$$

Dabei ist $\|f\|_\infty = \sup\big\{|f(x)| \;\big|\; a \leq x \leq b\big\}$. (Es folgt sofort, daß auch $f \cdot g : [a, b] \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation ist.) Hinweis: Verwenden Sie

$$f(s)g(s) - f(t)g(t) = f(s)\big(g(s) - g(t)\big) + g(t)\big(f(s) - f(t)\big).$$

254) Für $f \in BV\big([a, b]\big)$ sei $\|f\|_V := |f(a)| + V_a^b(f)$. Beweisen Sie, dass $\|\cdot\|_V$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) $\|f\|_V \geq 0$ für alle $f \in BV\big([a, b]\big)$ und $\|f\|_V = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
(2) $\|\alpha f\|_V = |\alpha|\, \|f\|_V$ für alle $f \in BV\big([a, b]\big)$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$,
(3) $\|f + g\|_V \leq \|f\|_V + \|g\|_V$ für alle $f, g \in BV\big([a, b]\big)$.

Damit ist bewiesen, dass $\|\cdot\|_V$ eine Norm auf dem Vektorraum $BV\big([a, b]\big)$ ist. Ist $V_a^b(\cdot)$ ebenfalls eine Norm auf diesem Vektorraum? (D.h.: Besitzt $V_a^b(\cdot)$ ebenfalls die Eigenschaften 1 – 3 ?) Falls nicht: Welche der drei Bedingungen ist verletzt?

255) Die Neilsche Parabel $y^2 = x^3$ besitzt oberhalb der x-Achse die Parametrisierung $f(t) = (t, t^{3/2})$. Berechnen Sie ihre Bogenlänge für $f : [0, b] \to \mathbb{R}^2$.

256) Eine Lemniskate ist die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit der folgenden Eigenschaft: Das Produkt des Abstandes von (x, y) zum Punkt $(a, 0)$ mit dem Abstand von (x, y) zum Punkt $(-a, 0)$ ist a^2 (wobei $a > 0$). Leiten Sie daraus die Lemniskatengleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$ ab. Zeigen Sie weiters: Führt man Polarkoordinaten ein, so ergibt sich daraus die Gleichung $r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$ für $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$.

257) Beweisen Sie: Ist eine Kurve in Polarkoordinaten durch die stetig differenzierbare Abbildung $\varphi \mapsto r(\varphi)$ gegeben (mit $\alpha \leq \varphi \leq \beta$), so ist ihre Weglänge

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2 + \big(r'(\varphi)\big)^2}\, d\varphi.$$

258) Berechnen Sie die Länge der Archimedischen Spirale, deren Gleichung in Polarkoordinaten durch $r = \varphi$ gegeben ist für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

259) Zeigen Sie, daß der Weg $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} (t, t^2 \cos\frac{\pi}{t^2}) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ (0, 0) & \text{für t=0} \end{cases}$$

nicht rektifizierbar ist. Hinweis: Es ist $f(\frac{1}{\sqrt{n}}) = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{(-1)^n}{n})$. Verwenden Sie die Zerlegung Z_n $(0 < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}} < \cdots < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1)$ und zeigen Sie $\ell(f, Z_n) > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

260) Zeigen Sie: Die Polarkoordinatenabbildung

$$(0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \qquad (r, \varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

ist in allen Punkten lokal invertierbar. Ist diese Abbildung global invertierbar?

261) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$. Zeigen Sie: f ist an jeder Stelle $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal invertierbar, nicht aber bei $(0, 0)$.

262) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x) + 2\cos(y) - \frac{1}{2}$. Der Punkt $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2})$ erfüllt $f(x, y) = 0$. Lassen sich solche y in einer Umgebung von $\frac{\pi}{6}$ als Funktion von x darstellen? Wenn ja, berechnen Sie die Ableitung $y'(\frac{\pi}{6})$.

263) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^4 + 2x\cos(y) + \sin(z)$. Zeigen Sie, daß für hinreichend kleine x, y, z die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechnen Sie $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$.

264) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2z^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

für hinreichend kleine x durch positive Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ aufgelöst werden kann und berechenen Sie y' in Abhängigkeit von x, y und z' in Abhängigkeit von x, z.

265) Leiten Sie den Satz über die Umkehrfunktion aus dem Satz über implizite Funktionen ab. Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$. Achten Sie darauf, daß $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ gegenüber der Notation in der Vorlesung "die Rollen getauscht haben."

266) Bestimmen Sie mittels Lagrange-Multiplikatoren den kleinsten Abstand der Gerade $ax + by = c$ vom Nullpunkt, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$.

267) Welcher Punkt der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ hat vom Punkt $(1, 1, 1)$ den kleinsten bzw. größten Abstand? Erraten Sie die Lösung, bevor Sie sie durch eine Rechnung bestätigen.

268) Bestimmen Sie Minimum und Maximum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ und der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

269) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^4 - 4x^2 + 4y^2$. Hinweis: Achten Sie darauf, daß alle Voraussetzungen des Satzes über Langrange–Multiplikatoren erfüllt sind.

270) Zu bestimmen seien die lokalen und globalen Minima der Funktion $f(x, y) = x$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^3 + x^2 - x - 1 - y^2 = 0$.
Bildet man $F(x, y, \lambda) = x + \lambda(x^3 + x^2 - x - 1 - y^2)$ und fordert

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial F}{\partial x} &= 1 + \lambda(3x^2 + 2x - 1) = 0 \\ \tfrac{\partial F}{\partial y} &= -2\lambda y = 0 \\ \tfrac{\partial F}{\partial \lambda} &= x^3 + x^2 - x - 1 - y^2 = 0, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus der ersten Gleichung, daß $\lambda \neq 0$, also nach der zweiten Gleichung $y = 0$. Einsetzen in die dritte Gleichung gibt $x \in \{1, -1\}$. Setzt man in der ersten Gleichung $x = -1$, erhält man einen Widerspruch, also ist $(x, y) = (1, 0)$ der einzige kritische Punkt. Andererseits gilt $g(-1, 0) = 0$ und $(-1, 0)$ hat den kleineren x-Wert. Wie ist das möglich?

271) Berechnen Sie $\int_Q f(x,y)\,d(x,y)$ für

a) $Q = [0,2] \times [3,4]$, $f(x,y) = 2x + 3y$

b) $Q = [0,1]^2$, $f(x,y) = xy + y^2$

c) $Q = [1,2]^2$, $f(x,y) = e^{x+y}$

d) $Q = [0, \frac{\pi}{2}]^2$, $f(x,y) = \sin(x+y)$

272) a) Berechnen Sie

$$\int_A x^2 y\, d(x,y),$$

wobei A die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Nullpunkt sei.
b) Berechnen Sie

$$\int_A (x + y^2)\, d(x,y),$$

wobei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ sei.

273) Die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten gegeben durch $\alpha \le \varphi \le \beta$ und $0 \le r \le \rho(\varphi)$, wobei $\rho : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ positiv und stetig sei. Zeigen Sie mittels der Substitutionsformel für Polarkoordinaten, daß

$$v(B) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Folgern Sie daraus: Ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel α hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} r^2 \alpha$.

274) Es seien $a, b > 0$. Beweisen Sie, daß die Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$ den Flächeninhalt $ab\pi$ besitzt. Benutzen Sie dazu die verallgemeinerten Polarkoordinaten $(x,y) = \big(ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi)\big)$ mit Funktionaldeterminante abr.

275) Es bezeichne K_n die n-dimensionale Einheitskugel, d.h. $K_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \le 1\}$. Zeigen Sie: K_n besitzt den (n-dimensionalen) Jordan - Inhalt

$$v(K_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$