Übung Analysis in einer Variable für LAK, SS 2010

Christoph Baxa

1) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\xi \in I$ und $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ seien alle in ξ differenzierbar. Beweisen Sie: Dann ist auch $f_1 \cdots f_n : I \to \mathbb{R}$ in ξ differenzierbar und es gilt

$$(f_1 f_2 \cdots f_n)'(\xi) = (f_1' f_2 \cdots f_n)(\xi) + (f_1 f_2' f_3 \cdots f_n)(\xi) + \cdots + (f_1 \cdots f_{n-1} f_n')(\xi).$$

2) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ direkt aus der Definition.

3) Beweisen Sie die Quotientenregel für die Ableitung.

4) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x}(1+x^2)$ c) $f(x) = (x-1)^3(2x+3)^4(x-1)^2$

5) Bestimmen Sie Definitionsbereich und die ersten drei Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$ b) $f(x) = e^{2x+3}$ c) $f(x) = x \log x$

6) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$):

a) $f(x) = \frac{x^2}{2x^4-1}$ b) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ c) $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^n}$ d) $f(x) = \frac{(x+5)^7}{(x-7)^5}$

7) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{3+x}$ b) $f(x) = \sqrt{x^2+x+2}$ c) $f(x) = x^2\sqrt{1+3x^2}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{4+x}{1-x}}$

8) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \log(1+x^2)$ b) $f(x) = e^{x-\log x}$ c) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ d) $f(x) = x^x$

9) Finden Sie einen geschlossenen Ausdruck für die folgenden Funktionen (mit $n \in \mathbb{N}$):

a) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$.

b) $f(x) = x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + 4^2x^4 + \cdots + n^2x^n$.

10) Beweisen Sie, ausgehend von der Gleichung $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, mittels Differenzieren die folgenden Identitäten für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}k\binom{n}{k} = 0$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$

11) Es seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Wo nimmt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - a_j)^2$ ein Miniumum an?

12) Welche Bedingung müssen $a, b, c \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein lokales Maximum besitzt?

13) Welche Bedingung muß $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + bx^2 + 3x + 5$ kein lokales Extremum besitzt?

14) Finden Sie die lokalen Minima und Maxima der Funktion

$$f : [1, 7] \to \mathbb{R},\ f(x) = 7x^5 + x^3 + \tfrac{x-1}{x}.$$

15) Bestimmen Sie das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, das dem Einheitskreis eingeschrieben werden kann.

16) Bestimmen Sie das achsenparallele Rechteck mit maximalem Umfang, das der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eingeschrieben werden kann.

17) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \log(1 + 1/x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1-} \log x \cdot \log(1 - x)$ c) $\lim\limits_{x \to 0+} x^x$

18) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte (mit $a > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$):

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1 - x)^\alpha - (1 - \alpha x)}{x^2} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$$

19) Ist es möglich, den Grenzwert

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

durch (direkte) Anwendung der Regel von de l'Hospital zu finden? Falls nicht, finden Sie einen anderen Weg zu seiner Berechnung.

20) Finden Sie den Fehler in der folgenden Anwendung der Regel von de l'Hospital. Wie lautet der wahre Grenzwert?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{6x + 2}{2} = 4$$

21) Beweisen Sie

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

und finden Sie eine analoge Formel für $\cos x + \cos y$.

22) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$ b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$

23) Beweisen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$ b) $\sin(3x) = -4\sin^3 x + 3\sin x$

24) a) Zeigen Sie mit Hilfe des vorletzten Beispiels $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.
b) Zeigen Sie mit Hilfe des vorangegangenen Beispiels $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ und folgern Sie daraus $\sin(\pi/6) = 1/2$.
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b), daß $\cos(\pi/3) = 1/2$ und $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

25) Beweisen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $\sin(nx) = \binom{n}{1}\sin x\cos^{n-1}x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3}x + \binom{n}{5}\sin^5 x\cos^{n-5}x - + \cdots$

b) $\cos(nx) = \binom{n}{0}\cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2}x\sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4}x\sin^4 x - + \cdots$

26) Beweisen Sie:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Leiten Sie Formeln für $\tan(x-y)$, $\tan(2x)$ und $\cot(x+y)$ ab.

27) Beweisen Sie: a) Für $-1 \le x \le 1$ gilt $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$,
b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \pi/2$.

Die folgenden Beispiele beschäftigen sich mit den Hyperbelfunktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert werden:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} \quad (\text{für } x \neq 0)$$

28) a) Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.
b) Beweisen Sie $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (Diese Relation erklärt die Namen. Welcher Teil der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ wird durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ parametrisiert?)

29) Beweisen Sie:
a) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$, was ist $\frac{d}{dx} \cosh x$? Was ist $\frac{d^n}{dx^n} \sinh x$, was $\frac{d^n}{dx^n} \cosh x$?
b) $\frac{d}{dx} \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$, was ist $\frac{d}{dx} \coth x$?

30) a) Beweisen Sie: $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
b) Finden Sie eine analoge Formel für $\sinh(x+y)$

31) Beweisen Sie:
a) $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$ und $\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$,
b) $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

32) Beweisen Sie

$$\text{a)}\ \cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2} \qquad \text{b)}\ \sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$$

33) Beweisen Sie

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

34) Definieren Sie die Umkehrfunktionen zu sinh, cosh und tanh, genannt Arsinh (lies: Area sinus hyperbolicus), Arcosh und Artanh auf $\mathbb{R}$, $[1, +\infty)$ und $(-1, 1)$, skizieren Sie ihre Graphen und berechnen Sie ihre Ableitungen.

35) Beweisen Sie die folgenden Identitäten. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten diese?

$$\text{a)} \quad \sin x + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\text{b)} \quad \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1}{2}$$

36) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen:
a) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$ b) $f(x) = \sin^2(x^3 + 1)$ c) $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + \cos^3 \sqrt{x}}$

37) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \arcsin(x^2)$ b) $f(x) = (\arccos x)^2$ c) $f(x) = \arctan \frac{x-1}{x}$

38) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^x}{\tan x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

39) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regel von de l'Hospital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos x+e^x+e^{-x}-4}{x^4}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$

40) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

41) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x\sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist im Punkt $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

42) Beweisen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, ihre Ableitung f' ist im Punkt $x = 0$ aber nicht stetig. Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion.

43) a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$ (wobei $x_0 \in [a, b]$). (Das heißt, f nimmt – mit höchstens einer Ausnahme – überall den Wert 0 an.) Beweisen Sie, ausgehend von der Definition des Riemann-Integrals: Die Funktion f ist Riemann-integrierbar und $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

b) Folgern Sie aus a): Es sei wieder $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle bis auf endlich viele x aus dem Intervall $[a, b]$. Dann ist f Riemann-integrierbar und es gilt $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

44) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $f(x) = g(x)$ für alle bis auf endlich viele x aus dem Intervall $[a, b]$. Beweisen Sie: Ist f Riemann-integrierbar, so ist auch g Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Hinweis: Verwenden Sie das vorangegangene Beispiel.

45) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen. Beweisen Sie:

a) $f \cdot g = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$,
b) $\max\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g + |f-g|\big)$,
c) $\min\{f, g\} = \frac{1}{2}\big(f + g - |f-g|\big)$.

46) Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad$ für $x \in \mathbb{R}$,
b) $\operatorname{Arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad$ für $x \geq 1$,
c) $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad$ für $x \in (-1, 1)$.

Hinweis: Verwenden Sie Beispiel 34) und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

47) Überprüfen Sie durch Differenzieren auf den drei Intervallen $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, +\infty)$, daß

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Auf welcher Menge ist die Gleichung $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{Artanh} x$ gültig?

48) Suchen Sie den Fehler in der folgenden Argumentation: Da

$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin x\cos x = \sin(2x) = \frac{d}{dx}\Big(-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big)$$

sind sowohl $x \mapsto \sin^2 x$ als auch $x \mapsto -\frac{1}{2}\cos(2x)$ Stammfunktion von $x \mapsto \sin(2x)$, also muß $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ gelten.

49) Die Funktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, die durch

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist, besitzt für $x \geq 0$ eine Ableitung $f := F'$ (und daher f eine Stammfunktion), die Einschränkung von f auf das Intervall $[0, 1]$ ist aber nicht Riemann-integrierbar.

50) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int x\sqrt{x+1}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x+4}}\,dx \qquad \text{c)} \int \sqrt[3]{x+1}\,(x-1)^2\,dx$$

51) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_0^1 x(2x-1)^5\,dx \qquad \text{b)} \int_0^2 (x^2+1)\,\sqrt[3]{(x-1)^2}\,dx$$

52) Verwenden Sie partielle Integration, um Rekursionsformeln zur Berechnung der folgenden beiden Stammfunktionen herzuleiten:

a) $\int x^n \sinh x\,dx$ b) $\int x^n \cosh x\,dx$

53) Finden Sie Rekursionsformeln für die folgenden Stammfunktionen (wobei $n \in \mathbb{N}$):

a) $\int \cos^n x\,dx$ b) $\int x^n \cos x\,dx$

54) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

a) $\int \arcsin x\,dx$ b) $\int \arctan x\,dx$

55) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)} \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int x^{-1/3}\big(x^{2/3}+1\big)^{1/3}\,dx \qquad \text{c)} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

56) Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(2-x^3)^3} \qquad \text{c)} \int_1^8 x^3\sqrt{1+x^4}\,dx$$

57) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen mit Hilfe der Substitution $x = \sinh t$:

$$\text{a)} \int \sqrt{x^2+1}\,dx \qquad \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$$

58) Zeigen Sie die folgenden Formeln:

a) $\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)}$,

b) $\int f'(x)\big(f(x)\big)^n\,dx = \frac{1}{n+1}\big(f(x)\big)^{n+1}$ mit $n \in \mathbb{N}$,

c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)|$ wobei $f(x) \neq 0$.

59) Finden Sie die (reelle) Partialbruchzerlegung der folgenden rationalen Funktionen:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{x^3-2x^2+x} \qquad \text{b)}\quad \frac{x+1}{x^4-x} \qquad \text{c)}\quad \frac{x^2+1}{x^5+2x^4+2x^3+x^2}$$

60) Finden Sie Stammfunktionen für die rationalen Funktionen aus dem vorangegangenen Beispiel.

61) Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale, indem Sie sie durch eine passende Substitution auf die Integrale rationaler Funktionen zurückführen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

62) Finden Sie die folgenden unbestimmten Integrale indem Sie sie durch eine passende Substitution auf die Integrale rationaler Funktionen zurückführen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{\cos x} \qquad \text{c)}\quad \int \frac{1+\tan x}{\sin(2x)}\,dx$$

63) Zeigen Sie: Wenn R eine rationale Funktion ist, dann kann man die folgenden unbestimmten Integrale durch eine passende Substitution auf das unbestimmte Integral einer rationalen Funktion zurückführen. (Dabei bedeutet ein Ausdruck der Gestalt $R(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen, d.h. eine Funktion der Gestalt $p(x,y)/q(x,y)$, wobei p und q Polynome in zwei Variablen sind.)

$$\text{a)}\quad \int R\big(e^{ax}\big)\,dx \qquad \text{b)}\quad \int R\big(\sinh(ax),\cosh(ax)\big)\,dx \qquad \text{c)}\quad \int R\big(x,\sqrt[k]{ax+b}\big)\,dx$$

64) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx \quad (\text{für } \alpha \neq 0) \qquad \text{b)}\quad \int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx \quad (\text{für } |\alpha| \neq |\beta|)$$

65) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \sqrt{2x+3}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \cos(3x+1)\,dx \qquad \text{c)}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x-1}}$$

66) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int x^2 \sin(2x)\,dx \qquad \text{b)}\quad \int (x^3+x^2-1)e^{2x-4}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int (x^2+2x)\sinh\frac{x}{2}\,dx$$

67) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int x\arctan x\,dx \qquad \text{c)}\quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1-5x^3}}\,dx$$

68) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int xe^{-x^2}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$$

69) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{\log x}{x}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

70) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \tan^2 x\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int \frac{4}{\sinh x\cosh x}\,dx$$

71) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx \qquad \text{b)}\quad \int \frac{x^3}{x^3-x^2-x+1}\,dx \qquad \text{c)}\quad \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

72) Finden Sie die folgenden Stammfunktionen:

$$\text{a)}\quad \int \frac{dx}{a^2+b^2x^2} \quad (\text{mit } a,b\neq 0) \qquad \text{b)}\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}} \quad (\text{mit } a>0 \text{ und } b\neq 0)$$

73) Bestimmen Sie, für welche α das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie für diese α seinen Wert:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$$

74) Bestimmen Sie, für welche α das folgende uneigentliche Integral existiert und berechnen Sie für diese α seinen Wert:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

75) Berechnen Sie die folgenden beiden uneigentlichen Integrale:

$$\text{a)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{4-x}}\,dx$$

76) Es sei $a < b$. Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Welchen Wert haben sie in diesem Fall?

$$\text{a)} \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$$

77) Beweisen Sie: Wenn für zwei Funktionen $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ und $\int_a^\infty g(x)\,dx$ existieren und $c \in \mathbb{R}$ ist, dann existieren auch die uneigentlichen Integrale $\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx$ und $\int_a^\infty (cf)(x)\,dx$ und es gelten:

$$\text{a)} \int\limits_a^\infty (f+g)(x)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx + \int\limits_a^\infty g(x)\,dx \qquad \text{b)} \int\limits_a^\infty (cf)(x)\,dx = c\int\limits_a^\infty f(x)\,dx.$$

78) Beweisen Sie, daß die Gammafunktion die folgende Funktionalgleichung erfüllt: Für alle $x > 0$ ist $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. (Hinweis: Partielle Integration.) Folgern Sie daraus, daß $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

79) Berechnen Sie die folgenden Integrale exakt und näherungsweise mittels Sehnentrapez-, Tangententrapez- und Simpson-Regel (in ihrer jeweils einfachsten Form und bei Unterteilung in 2 bzw. 3 Teilintervalle).

a) $\int_0^1 x^2\,dx$ b) $\int_0^1 x^4\,dx$ c) $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Welche Unterschiede in der Qualität der Approximation durch die verschiedenen Formeln kann man erkennen?