Übungen zu Algebra für LAK, SS 2018

Christoph Baxa

1) Entscheiden Sie, welche der Gruppenaxiome von $(G, \circ)$ erfüllt werden. Ist $(G, \circ)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?

a) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a + b + ab$ b) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a - b$ c) $G = \mathbb{R}$, $a \circ b = a^2 - b^2$

2) Es sei $a \circ b = \max\{a, b\}$. Für welche der folgenden Mengen M ist $(M, \circ)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?

a) $M = \mathbb{N}$ b) $M = \mathbb{Z}$ c) $M = \{2, 5, 6, 9, 13\}$ d) $M = [0, 1]$ e) $M = (0, 1]$

3) Ist $(\mathcal{M}, +)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe? Dabei bezeichne $+$ die übliche Addition von Matrizen und $\mathcal{M}$ die folgende Menge:

a) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$
b) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$
c) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ sind gerade} \right\}$

4) Ist $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe? Dabei bezeichne $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen und $\mathcal{M}$ die folgende Menge:

a) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$
b) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$
c) $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ sind gerade} \right\}$

5) Es bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten und $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation von Polynomen.

- a) Ist $(\mathcal{P}, +)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?
b) Ist $(\mathcal{P}, \cdot)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?

6) Es sei $d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{P}_d = \{p \in \mathcal{P} \mid \text{grad } p \leq d\}$ (d.h. die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq d$) und $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation von Polynomen.

- a) Ist $(\mathcal{P}_d, +)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?
b) Ist $(\mathcal{P}_d, \cdot)$ eine Halbgruppe, ein Monoid, eine Gruppe bzw. eine abelsche Gruppe?

7) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b \text{ für gewisse } a, b \in \mathbb{R} \text{ wobei } a \neq 0\}$. Bildet G mit $\circ$ (d.h. der Komposition von Funktionen) eine Gruppe? Wenn ja, ist diese abelsch?

8) Es sei $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe und $a_1, \dots, a_n \in G$. Beweisen Sie: Ist $i_1, i_2, \dots, i_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$, so gilt

$$a_{i_1} \circ \dots \circ a_{i_n} = a_1 \circ \dots \circ a_n.$$

9) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass G genau dann abelsch ist, wenn für alle $a, b \in G$ die Gleichung $(a \circ b)^2 = a^2 \circ b^2$ gilt.

10) a) Es sei P ein fest gewählter Punkt in der Ebene. Für einen Winkel α bezeichne R_α die Rotation um den Punkt P um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn. Beweisen Sie, dass $(\mathcal{R}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist. Dabei bezeichne

$$\mathcal{R} = \{R_\alpha \mid \alpha \text{ ist ein Winkel und } 0^\circ \leq \alpha < 360^\circ\}$$

die Menge aller Rotationen um den Punkt P und $\circ$ die übliche Verknüpfung von Abbildungen.

b) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. Dabei bezeichne $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen und

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen a) und b)?

11) Es seien $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ zwei Gruppen. Beweisen Sie:

a) $G \times H$ bildet mit der Verknüpfung $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \circ_G b_1, a_2 \circ_H b_2)$ eine Gruppe.

b) Die Gruppe $(G \times H, \circ)$ ist genau dann abelsch, wenn die Gruppen $(G, \circ_G)$ und $(H, \circ_H)$ beide abelsch sind.

Kann man diese Aussagen auf n Gruppen $(G_1, \circ_1), \dots, (G_n, \circ_n)$ verallgemeinern?

12) Es sei $G = \{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}, (x, y) \neq (0, 0)\}$. Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen bezeichnet.

13) Es sei $G = \{+1, -1, +i, -i\}$. Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe bildet, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation komplexer Zahlen bezeichnet. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel.

14) Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ und $(-1, -1)$ (im $\mathbb{R}^2$). Betrachten Sie die Menge $D_4 = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ von Bijektionen des Quadrats. Dabei bezeichne I die Identität, R die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung, S_0 die Spiegelung an der Gerade $y = x$, S_1 die Spiegelung an der y -Achse, S_2 die Spiegelung an der Gerade $y = -x$ und S_3 die Spiegelung an der x -Achse. Beweisen Sie, dass $(D_4, \circ)$ eine nichtabelsche Gruppe bildet, wobei $\circ$ die Verknüpfung von Abbildungen bezeichnet. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel von $(D_4, \circ)$.

15) Es bezeichne D_3 die Menge der Symmetrieabbildungen eines gleichseitigen Dreiecks, die Isometrien sind. Beweisen Sie, dass $(D_3, \circ)$ eine nichtabelsche Gruppe bildet, wobei $\circ$ wieder die Verknüpfung von Abbildungen bezeichne. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel von $(D_3, \circ)$.

16) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

und $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

17) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, (z, w) \neq (0, 0) \right\}$$

und $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

18) Finden Sie zehn verschiedene Untergruppen der Gruppe $(D_4, \circ)$ und geben Sie ihre Verknüpfungstafeln an.

19) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass H eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist, wobei

$$H = \left\{ \frac{a}{p^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

20) Es sei p eine Primzahl. Beweisen Sie, dass H eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist, wobei

$$H = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \text{ teilt } b \text{ nicht} \right\}.$$

21) Beweisen Sie, dass $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.

22) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie, dass

$$\mathrm{SL}_2(K) := \{A \in \mathcal{M}_2(K) \mid \det A = 1\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in K, ad - bc = 1 \right\}$$

eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_2(K), \cdot)$ ist, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation von Matrizen bezeichne. *Bemerkung.* Dabei steht SL für Special Linear Group.

23) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und H_1 und H_2 Untergruppen von G . Beweisen Sie, dass $H_1 \cap H_2$ ebenfalls eine Untergruppe von G ist.

24) Es seien

$$M = \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}, \quad M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Weiters bezeichne $\bullet$ die komponentenweise Multiplikation, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ y_1 \cdot y_2 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $(M, \bullet)$, $(M_1, \bullet)$ und $(M_2, \bullet)$ Monoide sind und bestimmen Sie ihre neutralen Elemente.

25) Bestimmen Sie die Untergruppen $\langle A \rangle$, $\langle B \rangle$ und $\langle A \cdot B \rangle$ der Gruppe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

26) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = 4$. Beweisen Sie, dass die Verknüpfungstafel von G (bis auf Umordnung der Zeilen bzw. Spalten) eine der folgenden beiden Gestalten haben muss:

$\circ$	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

oder

$\circ$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Hinweis. Nach dem Satz von Lagrange gilt $\mathrm{ord}_G x \in \{2, 4\}$ für jedes $x \in G \setminus \{e\}$. Unterscheiden Sie die beiden Fälle, dass es ein $a \in G \setminus \{e\}$ mit der Eigenschaft $\mathrm{ord}_G a = 4$ gibt bzw. dass $\mathrm{ord}_G x = 2$ für alle $x \in G \setminus \{e\}$.

Bemerkung. Gruppen der Ordnung 4, deren Verknüpfungstafel die Gestalt der rechten Tafel besitzt, werden als Kleinsche Vierergruppe bezeichnet.

27) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit Ordnung $|G| \leq 5$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

28) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, H eine Untergruppe und $a \in G$. Beweisen Sie, dass

$$a \circ H \circ a^{-1} := \{a \circ h \circ a^{-1} \mid h \in H\}$$

eine Untergruppe von G ist.

Bemerkung. Eine Untergruppe der Gestalt $a \circ H \circ a^{-1}$ wird eine zu H konjugierte Untergruppe genannt.

29) Betrachte die Gruppe $(D_3, \circ)$. Bestimmen Sie die zu H konjugierte Untergruppe $x \circ H \circ x^{-1}$ für a) $H = \{I, S_a\}$ und $x = S_b$ und b) $H = \{I, R^+, R^-\}$ und $x = S_a$.

Definition. Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe, so bezeichnet man

$$Z(G) = \{a \in G \mid a \circ x = x \circ a \text{ für alle } x \in G\}$$

als das Zentrum von G .

30) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass $Z(G)$ eine abelsche Untergruppe von G ist.

31) a) Wie kann man das Zentrum einer endlichen Gruppe mit Hilfe ihrer Verknüpfungstafel bestimmen?

b) Bestimmen Sie $Z(D_3)$.

c) Was ist das Zentrum einer abelschen Gruppe?

32) Berechnen Sie σ^{-1} , τ^{-1} , $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$ für $\sigma, \tau \in S_6$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

33) Es sei $(i_1 \dots i_k) \in S_n$ ein Zyklus und $\sigma \in S_n$ beliebig. Beweisen Sie, dass

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)).$$

Hinweis. Sie können die äquivalente Aussage

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_k) = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_k)) \circ \sigma$$

überprüfen.

34) Stellen Sie die Permutationen $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma \in S_6$ aus Beispiel 32 als Verknüpfung paarweise elementfremder Zyklen dar.

35) Beweisen Sie, dass sich jeder k -Zyklus $(i_1 \dots i_k) \in S_n$ auf folgende Weise als Verknüpfung von $k - 1$ Transpositionen schreiben lässt:

$$(i_1 \dots i_k) = (i_1 i_k) \circ (i_1 i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 i_3) \circ (i_1 i_2).$$

36) a) Beweisen Sie: Für $1 < i < j \leq n$ gilt die Identität $(i j) = (1 i) \circ (1 j) \circ (1 i)$.

b) Folgern Sie mit Hilfe von Korollar 27 und Teil a): Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Verknüpfung von Transpositionen der Gestalt $(1 2), (1 3), \dots, (1 n)$ schreiben.

37) a) Beweisen Sie: Für $1 \leq i < j \leq n$ mit $j > i + 1$ gilt die Identität

$$(i j) = (i i + 1) \circ (i + 1 i + 2) \circ \dots \\ \dots \circ (j - 2 j - 1) \circ (j - 1 j) \circ (j - 2 j - 1) \circ \dots \circ (i + 1 i + 2) \circ (i i + 1).$$

b) Folgern Sie mit Hilfe von Korollar 27 und Teil a): Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Verknüpfung von Transpositionen der Gestalt $(1 2), (2 3), (3 4) \dots, (n - 1 n)$ schreiben.

38) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$.

a) Beweisen Sie (z.B. mit Induktion nach i und mit Hilfe von Bsp. 33): Für $1 \leq i \leq n - 2$ gilt die Identität

$$(1 2 \dots n)^i \circ (1 2) \circ (1 2 \dots n)^{n-i} = (1 2 \dots n)^i \circ (1 2) \circ (1 2 \dots n)^{-i} = (i + 1 i + 2).$$

b) Folgern Sie aus dem vorangegangenen Beispiel und Teil a): Jede Permutation $\sigma \in S_n$ lässt sich als Verknüpfung der Transposition $(1 2)$ und des n -Zyklus $(1 2 \dots n)$ schreiben.

39) Bestimmen Sie das Signum der Permutationen $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}, \sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma \in S_6$ aus Beispiel 32.

40) Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus S_9 als Verknüpfung paarweise elementfremder Zyklen und bestimmen Sie ihr Signum.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $(4 5 6) \circ (5 6 7) \circ (6 7 1) \circ (1 2 3) \circ (2 3 4) \circ (3 4 5)$

d) $(1 4 7 6 2) \circ (2 4 3) \circ (4 5 8 1)$