Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

SS 2024

Christoph Baxa

1) Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe bzw. abelsche Gruppe? Welche der Gruppenaxiome sind erfüllt, welche nicht?

a) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b = a + b$
b) $G = \mathbb{N}$, $a \circ b = \max\{a, b\}$
c) $G = \mathbb{Z}$, $a \circ b = a - b$

2) Es sei $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = ax + b$ für gewisse $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0\}$. Ist $(G, \circ)$ (wobei $\circ$ die Verknüpfung von Abbildungen bezeichnet) eine Gruppe bzw. abelsche Gruppe? Welche der Gruppenaxiome sind erfüllt, welche nicht?

3) Es bezeichne wie in der Vorlesung (Seite 6) $D_3 = \{I, R^-, R^+, S_A, S_B, S_C\}$ die Menge der Isometrien, die ein gleichseitiges Dreieck bijektiv auf sich selbst abbilden. Beweisen Sie, dass $(D_3, \circ)$ eine nichtabelsche Gruppe ist. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel.

4) Wie in der Vorlesung (Seite 6) bezeichne $D_4 = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ die Menge der Isometrien, die ein Quadrat bijektiv auf sich selbst abbilden. Beweisen Sie, dass $(D_4, \circ)$ eine nichtabelsche Gruppe ist. Erstellen Sie zu diesem Zweck eine Verknüpfungstafel.

5) Es sei $n \in \mathbb{N}^+$, $n \geq 3$ und D_n sei die Menge aller Isometrien, die ein regelmäßiges n-eck bijektiv auf sich selbst abbilden. Beweisen Sie (oder geben Sie zumindest ein heuristisches Argument dafür, dass):

a) $(D_n, \circ)$ ist eine Gruppe,
b) D_n enthält $|D_n| = 2n$ Elemente,
c) D_n ist nichtabelsch.

6) Für $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne T_v die Translation $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T_v(x) = x + v$. Weiters sei $\mathcal{T} = \{T_v \mid v \in \mathbb{R}^2\}$ die Menge aller derartigen Translationen. Beweisen Sie, dass $(\mathcal{T}, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

7) Es seien $(G, \circ)$ und $(H, \diamond)$ zwei Gruppen. Beweisen Sie:
a) $G \times H$ bildet mit der Verknüpfung $(a, b) \bullet (c, d) = (a \circ c, b \diamond d)$ eine Gruppe.
b) Die Gruppe $(G \times H, \bullet)$ ist genau dann abelsch, wenn die beiden Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, \diamond)$ beide abelsch sind.

8) Beweisen Sie:

a) Für fest gewähltes $m \in \mathbb{Z}$ ist $m\mathbb{Z} = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$ Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$,
b) $\{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}^*\}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$,
c) Für $n \in \mathbb{N}^+$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ist U Untergruppe von $(\mathbb{R}^n, +)$, wobei

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}.$$

9) Finden Sie alle sechs Untergruppen der Gruppe $(D_3, \circ)$.

10) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ eine endliche Teilmenge von G. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) H ist eine Untergruppe von G,
(ii) $a \circ b \in H$ für alle $a, b \in H$.

11) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Beweisen Sie, dass die folgenden vier Aussagen äquivalent sind:

(i) $a = e$,
(ii) $a \circ a = a$,
(iii) $a \circ b = b$ für ein $b \in G$,
(iv) $b \circ a = b$ für ein $b \in G$.

12) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit $|G| = n$ Elementen und $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Beweisen Sie: Für jedes $x \in G$ ist

$$\{x \circ a_1, \ldots, x \circ a_n\} = \{a_1 \circ x, \ldots, a_n \circ x\} = G.$$

Folgern Sie, dass jede Spalte und jede Zeile der Verknüpfungstafel von G eine Permutation der Elemente von G enthält.

13) a) Beweisen Sie: Die Verknüpfungstafel einer einelementigen Gruppe $(G, \circ)$ mit $G = \{e\}$ hat die folgende Gestalt:

$\circ$	e
e	e

b) Beweisen Sie: Die Verknüpfungstafel einer Gruppe $(G, \circ)$ mit zwei Elementen $G = \{e, a\}$ hat die folgende Gestalt:

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Welche Gruppen mit einer Verknüpfungstafel dieser Gestalt sind bis jetzt in der Vorlesung bzw. den Übungen aufgetreten?

14) Beweisen Sie: Die Verknüpfungstafel einer Gruppe $(G, \circ)$ mit drei Elementen $G = \{e, a, b\}$ hat die folgende Gestalt:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Folgern Sie, dass die Verknüpfungstafel einer dreielementigen Gruppe die folgenden Gestalt hat:

$\circ$	e	a	a^2
e	e	a	a^2
a	a	a^2	e
a^2	a^2	e	a

Ist eine solche Gruppe bis jetzt in der Vorlesung oder den Übungen aufgetreten?

Bemerkung: Für Gruppen mit mehr als drei Elementen ist die Verknüpfungstafel im allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt. Z.B. gibt es für Gruppen mit vier Elementen zwei mögliche Verknüpfungstafeln.

15) Beweisen Sie, dass es sich bei $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ um einen Körper handelt. (Die Menge $\mathbb{F}_2$ und die beiden Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ findet man auf Seite 10 der Vorlesung.)

16) Beweisen Sie, dass es keine Ordnungsrelation $<$ gibt, durch die $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ zu einem geordneten Körper wird.

17) Es sei $n \in \mathbb{N}^+$. Beweisen Sie, dass der Raum $\mathbb{R}^n$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

einen reellen Vektorraum bildet.

18) Beweisen Sie, dass der Raum $\mathcal{P}$ aller Polynomfunktionen

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \text{ (mit } a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R})$$

mit der üblichen Addition von Polynomfunktionen und Multiplikation einer Polynomfunktion mit einer reellen Zahl einen reellen Vektorraum bildet.

19) a) Beweisen Sie, dass

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0, x = z \right\}$$

ein Teilraum des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.
b) Beweisen Sie, dass

$$T := \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Teilraum des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$ ist.
c) Beweisen Sie $S = T$.

20) a) Es sei V ein reeller Vektorraum und U und W zwei (nicht notwenig verschiedene) Teilräume von V. Beweisen Sie, dass ihr Durchschnitt $U \cap W$ ebenfalls ein Teilraum von V ist.
b) Benützen Sie Teil a) um Bsp. 19a) nochmals zu lösen.

21) a) Beweisen Sie: Sind $p, q \in \mathcal{P}$ reelle Polynomfunktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$, so gelten

$$\operatorname{grad}(p + q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad}(\alpha p) \leq \operatorname{grad} p.$$

Warum kann in beiden Aussagen kein Gleichheitszeichen verwendet werden?
b) Beweisen Sie: Ist $d \in \mathbb{N}$, so ist $\mathcal{P}_d$ ein Teilraum von $\mathcal{P}$.
c) Beweisen Sie: Sind $d, e \in \mathbb{N}$ und $d \leq e$, so ist $\mathcal{P}_d$ ein Teilraum von $\mathcal{P}_e$.

22) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des $\mathbb{R}^n$ (mit $n \geq 2$)?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq 0 \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 x_2 = 0 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{Q} \right\}$.

23) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des reellen Vektorraums $\mathcal{P}$ aller (reellen) Polynomfunktionen?
a) $\{p \in \mathcal{P} \mid p(1) = 0\}$,
b) $\{p \in \mathcal{P} \mid p(1) = 1\}$,
c) $\{p \in \mathcal{P} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\}$.

24) Es sei V ein reeller Vektorraum und U und W zwei Teilräume von V. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $U \cup W$ ist ein Teilraum von V,
(ii) $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$.

25) Es sei V ein reeller Vektorraum und U und W zwei Teilräume von V. Beweisen Sie, dass

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

ebenfalls ein Teilraum von V ist.

26) Es seien

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

sowie $U = [u]$ und $W = [w]$. Zeigen Sie, dass

$$U + W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 7x + 3y - 8z = 0 \right\}$$

27) Es sei V ein reeller Vektorraum und M und N nichtleere Teilmengen von V. Beweisen Sie:

a) M ist genau dann Teilraum von V wenn $[M] = M$,
b) $\big[[M]\big] = [M]$,
c) Aus $M \subseteq N$ folgt $[M] \subseteq [N]$.

28) Es sei V ein reeller Vektorraum und $\{u, v, w\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Beweisen Sie, dass dann $\{u + v, u + w, v + w\}$ ebenfalls eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

29) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die drei Mengen $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ alle Basen von V sind, wobei

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

30) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathcal{P}_2$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{q_1, q_2, q_3\}$ eine Basis von V ist, wobei

$$q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = x + 1 \quad \text{und} \quad q_3(x) = x^2 + x + 1.$$

31) Es seien $m, n \in \mathbb{N}^+$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^{m\times n}$, versehen mit den Verknüpfungen

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} + (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \quad \text{und} \quad \alpha\cdot(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

einen reellen Vektorraum bildet.

32) Es seien $m, n \in \mathbb{N}^+$. Beweisen Sie, dass $\{E_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist. Dabei ist die Matrix $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ folgendermaßen definiert: Ist $E_{ij} = (\varepsilon_{k\ell})_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le \ell\le n}}$, so ist

$$\varepsilon_{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (k,\ell) = (i,j), \\ 0 & \text{falls } (k,\ell) \ne (i,j). \end{cases}$$

33) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:
a) $(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A$,
b) $(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}$,
c) $(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}$.

Definition. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) wenn $A^\mathsf{T} = A$ (bzw. $A^\mathsf{T} = -A$) gilt.

34) Beweisen Sie:
a) Ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schiefsymmetrisch, so ist $a_{ii} = 0$ für $1 \le i \le n$.
b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, so ist $A = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet).
c) Die Menge der symmetrischen (bzw. schiefsymmetrischen) Matrizen bildet einen Teilraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

35) Finden Sie Basen für den Vektorraum aller symmetrischen und den Vektorraum aller schiefsymmetrischen Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

36) a) Beweisen Sie, dass sich jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix schreiben lässt.
b) Beweisen Sie, dass diese Darstellung eindeutig ist.

37) Berechnen Sie alle Produkte der folgenden drei Matrizen A, B und C (mit reellen Eintragungen), die man bilden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

38) Beweisen Sie: Sind $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$, so ist $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$.

39) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times \ell}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie:

a) $I_m \cdot A = A$,
b) $(\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B) = \alpha(A\cdot B)$.

40) Überprüfen Sie für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

durch direktes Nachrechnen, dass $(A\cdot B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} \cdot A^{\mathsf{T}}$ gilt.

41) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Wenn die Abbildung linear ist, geben Sie eine Darstellung mittels Multiplikation mit einer Matrix an.

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi(v) = -v$ b) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi(v) = v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1x_3 \end{pmatrix}$ d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$

Definition. Ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so bezeichnet man $\operatorname{Spur}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ als die Spur der Matrix A.

42) Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $\delta : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$, wobei $n \in \mathbb{N}^+$ ist und δ die Ableitung bezeichnet,
b) $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $\varphi(A) = \operatorname{Spur}(A)$,
c) $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\varphi(A) = AB - BA$.

43) Beweisen Sie für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

a) $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$,
b) Ist B invertierbar, so ist $\operatorname{Spur}(BAB^{-1}) = \operatorname{Spur}(A)$.

44) Bestimmen Sie Kern und Bild der folgenden linearen Abbildungen:

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$

45) Beweisen Sie:
a) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ist linear in der zweiten Spalte,
b) Die Determinantenabbildung $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ist linear in der zweiten Zeile.

46) Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \begin{vmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -2 & 6 & 9 \\ -1 & 7 & 7 \end{vmatrix}$$

47) Es sei $n \in \{2,3\}$. Beweisen Sie, dass die *Special Linear Group*

$$\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$$

eine Untergruppe von $(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ ist.

48) a) Es sei $n \in \{2,3\}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,
b) Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ schiefsymmetrisch, so ist $\det A = 0$.

49) Berechnen Sie die inversen Matrizen der folgenden Matrizen (wenn sie existieren):

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

50) Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen invertierbar? Geben Sie für diese x die inverse Matrix an.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)} \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

51) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

52) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 6x_1 + x_2 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

53) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$

54) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems einen eindimensionalen Teilraum von $\mathbb{R}^4$ und für welche eine zweidimensionalen?

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 13x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

55) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel (wenn es möglich ist):

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

56) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem aus Aufgabe 51) nochmals mit Hilfe der Cramerschen Regel (wenn es möglich ist).

57) Beweisen Sie, dass durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 10x_2y_2 \quad \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

58) Es sei $V = \mathbb{R}^{m\times n}$ und für $A, B \in V$ sei $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^{\mathsf{T}} \cdot B)$. Beweisen Sie, dass $\langle .\,,.\rangle$ ein inneres Produkt auf V ist.

59) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .\,,.\rangle$ und $\|\,.\,\|$ die davon induzierte Norm. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall\, v, w \in V.$$

Woher könnte die Bezeichnung Parallelogrammgleichung kommen?

60) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .\,,.\rangle$ und $\|\,.\,\|$ die davon induzierte Norm. Beweisen Sie

$$\langle v, w\rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\Big) \quad \forall\, v, w \in V.$$

61) Beweisen Sie, dass durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \max_{1\le i\le n} |x_i| \quad \text{für} \;\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

eine Norm auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist.

Bemerkung. Die Norm $\|\,.\,\|_\infty$ wird als *Maximumsnorm* oder ∞-*Norm* bezeichnet.

62) Beweisen Sie, dass die Norm aus dem vorangegangenen Beispiel für $n \geq 2$ die Parallelogrammgleichung aus Aufgabe 59) nicht erfüllt. Schließen Sie daraus, dass die Norm $\|\,.\,\|_\infty$ für $n \geq 2$ nicht durch ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird.

Hinweis. Finden Sie zunächst ein Gegenbeispiel für $n = 2$ und erweitern Sie es anschließend für $n > 2$.

63) a) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .\,,.\rangle$ und W ein Teilraum von V. Beweisen Sie, dass

$$W^\perp := \{v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \;\forall\, w \in W\}$$

ebenfalls ein Teilraum von V ist.

Bemerkung. Der Raum $W^\perp$ wird als *orthogonales Komplement* von W bezeichnet.

b) Es seien $V = \mathbb{R}^2$, $\langle .\,,.\rangle$ das Standardskalarprodukt, $w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und W der von w erzeugte Teilraum von V. Beschreiben Sie $W^\perp$.

64) Beweisen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\;\; \sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad \text{b)}\;\; \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

65) Beweisen Sie für $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \qquad \text{b)}\ \sin(3\alpha) = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

66) a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 64) (nochmals)

$$\sin\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \qquad (\text{d.h. } \sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 65a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d.h. $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$) und folgern Sie $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (d.h. $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$).
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil b)

$$\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\ (\text{d.h. } \cos(60^\circ) = \tfrac{1}{2}) \ \text{ und } \ \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\ (\text{d.h. } \sin(60^\circ) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}).$$

67) Beweisen Sie für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)}\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\text{b)}\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Definition. Die Funktion Tangens ist (für geeignete $\alpha \in \mathbb{R}$) definiert durch

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

68) a) Finden Sie den (maximalen) Definitionsbereich des Tangens.
b) Skizzieren Sie den Graphen des Tangens.
c) Wo findet man $\tan\alpha$ für einen Winkel α am Einheitskreis?
Welcher Zusammenhang besteht zum Namen der Funktion?

69) a) Finden und beweisen Sie Formeln für $\tan(\alpha+\pi)$, $\tan(\pi-\alpha)$ und $\tan(-\alpha)$.
b) Welche der Funktionswerte $\tan 0$, $\tan\frac{\pi}{6}$, $\tan\frac{\pi}{4}$, $\tan\frac{\pi}{3}$ und $\tan\frac{\pi}{2}$ existieren?
Geben Sie davon jene Funktionswerte an, die existieren.

70) Beweisen Sie (für geeignete $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) den Summensatz für den Tangens:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Folgen Sie daraus Formeln für $\tan(\alpha-\beta)$ und $\tan(2\alpha)$.