Übungsbeispiele zu Zahlentheorie für das Lehramt, SS 2025

Christoph Baxa

1) Beweisen Sie $(a-b) \mid (a^n - b^n)$ für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{N}^+$.

2) Beweisen Sie: Wenn $m \mid n$ dann $(a^m - b^m) \mid (a^n - b^n)$ (für alle $a, b \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}^+$).

3) Beweisen Sie: Wenn $2 \nmid n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ dann $8 \mid (n^2 + 23)$.

4) Beweisen Sie: Wenn $3 \nmid n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ dann $3 \mid (n^2 + 23)$.

5) Beweisen Sie: Wenn $2 \nmid a$ und $2 \nmid b$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$) dann $2 \mid (a^2 + b^2)$ aber $4 \nmid (a^2 + b^2)$.

6) Beweisen Sie, dass $6 \mid (n^3 - n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis.* Man kann den Beweis mit Induktion führen. Finden Sie einen geschickteren oder durchsichtigeren Weg?

7) Beweisen Sie $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis.* Verwenden Sie Induktion.

8) Bestimmen Sie den ggT mit Hilfe des euklidischen Algorithmus für:

a) $\mathrm{ggT}(7469, 2464)$ b) $\mathrm{ggT}(2689, 4001)$ c) $\mathrm{ggT}(2947, 3997)$ d) $\mathrm{ggT}(1109, 4999)$

9) Finden Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus $x, y \in \mathbb{Z}$, derart dass

a) $243x + 198y = 9$ b) $71x - 50y = 1$ c) $43x + 64y = 1$ d) $93x - 81y = 3$

Definition. Es seien $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$. Eine Gleichung der Gestalt

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b,$$

für die man Lösungen $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ sucht, heißt lineare diophantische Gleichung.

10) Es seien $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ und $a_1, \dots, a_n$ nicht alle $= 0$. Beweisen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die lineare diophantische Gleichung $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$ ist lösbar,
(ii) $\mathrm{ggT}(a_1, \dots, a_n) \mid b$.

11) Beweisen Sie: Wenn $\mathrm{ggT}(a, 4) = \mathrm{ggT}(b, 4) = 2$ (mit $a, b \in \mathbb{Z}$) dann $\mathrm{ggT}(a + b, 4) = 4$.

12) Beweisen Sie: Wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ dann $\mathrm{ggT}(a + b, a - b) \in \{1, 2\}$.

13) Beweisen Sie: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind $2k + 1$ und $9k + 4$ relativ prim.

14) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(4k + 1, 5k + 2)$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$.

15) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(2k-1, 9k+4)$ in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{Z}$.

16) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(56049, 14601, 43803)$.
Hinweis. Es wäre eine gute Übung, die Lösung auf mehrere Arten zu bestimmen.

17) Gegeben seien $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}^+$ mit $\mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Beweisen Sie: Aus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ folgt $c \mid a$ und $d \mid b$. *Hinweis.* Verwenden Sie Satz 12.

18) Gegeben seien $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}^+$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(c, d) = 1$. Beweisen Sie: Aus $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Z}$ folgt $b = d$.

19) Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a, b nicht beide $= 0$ und $d = \mathrm{ggT}(a, b)$. Beweisen Sie: Ist die lineare diophantische Gleichung $ax + by = c$ lösbar und $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ eine Lösung, so ist die Menge aller Lösungen dieser diophantischen Gleichung gegeben durch

$$\left\{ \left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t \right) \,\middle|\, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

20) Finden Sie die Lösungsmengen der linearen diophantischen Gleichungen aus Bsp. 9).