Übungen zu
Einführung in die lineare Algebra und Geometrie
WS 2008/09

Christoph Baxa

1) Beweisen Sie: Das innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^n$ erfüllt die folgenden Rechenregeln:

a) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \quad \forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n$
b) $\langle \alpha \cdot v, w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$
c) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$
d) $\langle \mathbf{o}, \mathbf{o}\rangle = 0$ und $\langle v, v\rangle > 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{o}\}$

2) Beweisen Sie die folgenden beiden Rechenregeln für das innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^n$, ohne die Koordinaten der auftretenden Vektoren zu verwenden:

a) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle \quad \forall\, u, v, w \in \mathbb{R}^n$
b) $\langle v, \alpha \cdot w\rangle = \alpha\langle v, w\rangle \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall\, v, w \in \mathbb{R}^n$

3) Zeigen Sie: Wenn K ein Körper ist und $n \in \mathbb{N}$, dann ist K^n ein Vektorraum über K.

4) Beweisen Sie: Die Menge $\mathcal{F} = \{(a_n)_{n\geq 1} \mid a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ aller reeller Folgen ist ein reeller Vektorraum.

5) Es sei I ein Intervall reeller Zahlen und $\mathbb{R}^I = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller auf I definierten Funktionen (nach $\mathbb{R}$). Beweisen Sie, daß $\mathbb{R}^I$ ein reeller Vektorraum ist, wobei Summe $f+g$ und skalares Vielfache $\alpha \cdot f$ (mit $f, g \in \mathbb{R}^I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$) durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ bzw. $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $x \in I$ definiert sind.

6) Beweisen Sie: Für zwei Polynomfunktionen $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelten

a) $\operatorname{grad}(p \cdot q) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$ b) $\operatorname{grad}(p+q) \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q\}$

Hinweis: Dabei verwendet man die Konvention $(-\infty) + n = (-\infty) + (-\infty) = -\infty$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7) Beweisen Sie, daß $P(\mathbb{R})$ (die Menge aller reellen Polynomfunktionen) und $P_n(\mathbb{R})$ (die Menge aller Polynomfunktionen $p \in P(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{grad} p \leq n$) reelle Vektorräume sind (mit denselben Verknüpfungen wie im vorletzten Beispiel).

8) Es sei $V = (0, +\infty)$, d.h. V ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Für $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $v \oplus w$ und $\alpha \odot v$ durch $v \oplus w = v \cdot w$ und $\alpha \odot v = v^\alpha$ definiert. Beweisen

Sie, daß V ein reeller Vektorraum ist. Hinweis: Sie können mit der allgemeinen Potenz x^α unbefangen rechnen, auch wenn in der Analysis noch nicht bewiesen worden ist, daß dafür dieselben Rechenregeln gelten wie z.B. für x^2.

9) Es sei I ein Intervall und $V = \{f \mid f : I \to (0, +\infty)\}$ die Menge aller positiven Funktionen auf I. Für $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $f \oplus g$ und $\alpha \odot f$ durch $(f \oplus g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ und $(\alpha \odot f)(x) = (f(x))^\alpha$ definiert. Beweisen Sie, daß V ein reeller Vektorraum ist.

10) Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \alpha_0 f''(x) + \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Beweisen Sie, daß V ein reeller Vektorraum ist.

11) Beweisen Sie, daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist.

12) Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und K ein Körper. Beweisen Sie, daß die Menge aller Abbildungen $f : M \to K$ mit den Verknüpfungen $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für $x \in M$ und $\alpha \in K$ ein K-Vektorraum ist. Kann man den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ als Spezialfall dieses Vektorraums auffassen?

13) Welches der folgenden Beispiele ist ein Vektorraum?

a) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}^n$ über $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{C}$

14) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta_1 x + \beta_2 y = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist.

15) Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ist.

16) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ (mit $n \geq 2$)?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq 0 \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 x_2 = 0 \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{Q} \right\}$

17) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $P(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$?

a) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ b) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid p(1) = 1\}$ c) $\{p \in P(\mathbb{R}) \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\}$

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade (oder symmetrisch) wenn sie $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Gerade Funktionen sind z.B. alle konstanten Funktionen, $f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots$ oder $f(x) = \cos x$. Ihre Graphen sind symmetrisch bezüglich der y-Achse. Sie heißt ungerade (oder schiefsymmetrisch) wenn sie $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Ungerade Funktionen sind z.B. $f(x) = x, x^3, x^5, \dots$ oder $f(x) = \sin x$. Ihre Graphen sind invariant unter einer Spiegelung am Nullpunkt.

18) Beweisen Sie, daß sowohl die geraden als auch die ungeraden Funktionen einen Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bilden.

19) Ist $\mathbb{Q}^n$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

20) Es sei V ein K-Vektorraum und U, W zwei Teilräume. Beweisen Sie, daß $U \cup W$ genau dann ein Teilraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

21) Finden Sie den Schnitt der folgenden beiden Teilräume U und W des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x - y + z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, 2x + y - z = 0 \right\}.$$

22) Zeigen Sie: Wenn $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, dann gilt

$$P_{n_1}(\mathbb{R}) \cap \dots \cap P_{n_k}(\mathbb{R}) = P_{\min\{n_1, \dots, n_k\}}(\mathbb{R}).$$

23) Es sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$, U alle geraden Funktionen in V und $W = P_2(\mathbb{R})$. Finden Sie den Schnitt $U \cap W$ dieser beiden Teilräume.

24) Bestimmen Sie den Teilraum des Vektorraums $\mathbb{C}^3$ über $\mathbb{C}$, der von den drei Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. (D.h. finden Sie $[v_1, v_2, v_3]$.)

25) Liegt im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ der Vektor u im von den Vektoren v_1, v_2, v_3 aufgespannten Teilraum? (D.h. gilt $u \in [v_1, v_2, v_3]$?) Dabei seien:

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

26) Welcher Teilräume von $P_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ werden a) von $\{p_1, p_2, p_3\}$ (mit $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1+x$, $p_3(x) = 1+x+x^2$) bzw. b) von $\{q_1, q_2, q_3\}$ (mit $q_1(x) = x^2-2$, $q_2(x) = x+3$, $q_3(x) = x^2+2x+5$) aufgespannt? Liegt p (mit $p(x) = -x^2+x+3$) in einem von beiden?

27) Es $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie $V = U \oplus Z = W \oplus Z$, wobei gelten soll, daß

$$U = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad Z = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$$

28) Beweisen Sie, daß $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (über $\mathbb{R}$) die direkte Summe der Teilräume der geraden und der ungeraden Funktionen ist. Hinweis: Verwenden Sie die Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\Big(f(x) + f(-x)\Big) + \tfrac{1}{2}\Big(f(x) - f(-x)\Big).$$

29) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind linear abhängig?

a) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ c) $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

d) $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ e) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

30) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge. Beweisen Sie, daß dann auch $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ linear unabhängig ist.

31) Stimmt die Aussage des letzten Beispiels auch noch für einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ (wobei $\mathbb{F}_2$ den Körper mit 2 Elementen bezeichnet)?

32) Es sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ und p_0 bzw. p_1 sollen die Funktionen $p_0(x) = 1$ bzw. $p_1(x) = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) bezeichnen. Zeigen Sie, daß $\sin, \cos, p_0$ und p_1 linear unabhängig sind.

33) Beweisen Sie, daß die Menge $\{\log p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$ ist. Hinweis: Verwenden Sie die Eigenschaften des Logarithmus und der eindeutigen Primfaktorzerlegung, auch wenn Sie sie noch in keiner Vorlesung gehört haben sollten.

34) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ seien paarweise orthogonal (d.h. es gilt $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für $1 \le i, j \le n$ und $i \ne j$). Beweisen Sie, daß $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

35) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Welche der Teilmengen aus Bsp. 29 ist ein Erzeugendensystem bzw. eine Basis von V?

36) Es sei $V = P_3(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Teilmengen sind Basen?
a) $\{p_1, p_2, p_3\}$ wobei $p_1(x) = x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$ und $p_3(x) = x^3 - x^2$.
b) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ wobei $p_1(x) = 2x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 - x$ und $p_4(x) = x^2 + 1$.

37) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ (und beweisen Sie, dass es wirklich eine Basis ist). Was ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$?

38) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie: Wenn U Teilraum von V ist, gibt es eine Teilraum W von V, sodaß $V = U \oplus W$. Hinweis: Ergänzen Sie eine Basis von U zu einer Basis von V.

39) Beweisen Sie, daß die Teilräume des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ gerade $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{o}\}$ und die Geraden durch den Nullpunkt sind. Hinweis: Beachten Sie Korollar 2.9.

40) Finden und beweisen Sie eine analoge Aussage für $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$.

41) Es sei $V = \mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ und U und W bezeichne die beiden Teilräume

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \quad \text{und} \quad W = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} U$, $\dim_{\mathbb{R}} W$, $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U + W)$.

42) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und U und W die folgenden beiden Teilmengen des K^n über K:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

und

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{n-1} x_n = 0 \right\}$$

a) Zeigen Sie, daß U und W beides Teilräume sind.
b) Bestimmen Sie $\dim_K U$, $\dim_K W$, $\dim_K(U \cap W)$ und $\dim_K(U + W)$.
c) Gilt $K^n = U \oplus W$?

43) Was ändert sich im letzten Beispiel, wenn man $K = \mathbb{F}_2$ wählt?

44) Es sei K ein Körper und U und W Teilräume des K^3 über K. Beweisen Sie: Wenn weder U noch W von einem einzelnen Vektor erzeugt werden, ist $U \cap W \neq \{\mathbf{o}\}$.

45) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Beweisen Sie:
a) Wenn U und W zwei Teilräume von V sind, die

$$V = U + W \quad \text{und} \quad \dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$$

erfüllen, dann gilt $V = U \oplus W$.
b) Wenn U und W zwei Teilräume von V sind, die

$$U \cap W = \{\mathbf{o}\} \quad \text{und} \quad \dim_K V = \dim_K U + \dim_K W$$

erfüllen, dann gilt $V = U \oplus W$.

46) Beweisen Sie, daß die folgenden Menge Basis von $M_2(\mathbb{R})$ ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

47) Berechnen Sie alle Produkte der folgenden drei Matrizen A, B und C (mit reellen Eintragungen), die man bilden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

48) Überprüfen Sie durch direktes Nachrechnen, daß $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ gilt (wobei A und B reelle Eintragungen haben):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

49) Es sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in M_n(K)$. Zeigen Sie: Wenn $a_{ii} \neq 0$ für $1 \le i \le n$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \le i, j \le n$ und $i \neq j$, ist A invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

50) Zeigen Sie: Wenn $ad - bc \neq 0$, ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

51) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Wenn $A \in M_n(K)$ die Eigenschaft besitzt, daß ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß $A^{r+1} = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet), dann ist $I_n - A$ invertierbar und es gilt $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^r$.

52) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ ist nicht kommutativ wenn $n \geq 2$.

Es sei K ein Körper und $A \in M_n(K)$. Als Spur von A bezeichnet man

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in K.$$

53) Es sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Beweisen Sie:

a) Es gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.
b) Wenn B invertierbar ist, gilt $\operatorname{Spur}(B^{-1}AB) = \operatorname{Spur} A$.

Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) wenn $A^t = A$ (bzw. $A^t = -A$) gilt.

54) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$ schiefsymmetrisch ist gilt $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$.
b) Sowohl die symmetrischen als auch die schiefsymmetrischen Matrizen bilden einen Teilraum von $M_n(K)$.
c) Bestimmen Sie die Dimension der beiden Teilräume aus b).
d) Der Vektorraum $M_n(K)$ ist die innere direkte Summe der beiden Teilräume aus b). Hinweis: Lassen Sie sich von Bsp. 28 inspirieren.

55) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

56) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mit Eintragungen aus $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4i \\ -1 & 1+i \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2i \\ 3i & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

57) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Wenn φ linear ist, geben Sie eine Darstellung mittels Multiplikation mit einer Matrix an.)

$$\text{a) } \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto -v \qquad \text{b) } \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

58) Beweisen Sie, daß die folgenden Abbildungen linear sind:

a) $\varphi : \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_k$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \left(\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)\right)_{n\geq 1}$,
b) $\varphi : \mathcal{F}_k \to \mathcal{F}_n$, $(a_n)_{n\geq 1} \mapsto \left(\frac{1}{n}a_n\right)_{n\geq 1}$,
c) $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$, $A \mapsto A \cdot B - B \cdot A$
(dabei sei K ein Körper und $B \in M_n(K)$ ist fest gewählt).

59) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^4$. Überprüfen Sie, daß

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von V ist und geben Sie eine explizite Formel für die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ an, die durch die folgenden Bilder der Elemente von B gegeben ist:

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

60) a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung. Finden Sie das Bild einer Geraden unter φ.

b) Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises $x_1^2 + x_2^2 = 1$ unter der linearen Abbildung $\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$.

61) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, daß die Abbildung $D : C^\infty(I) \to C^\infty(I)$, die durch $D(f) = f' = \frac{df}{dx}$ gegeben ist (d.h. D bildet jede Funktion auf ihre Ableitung ab) linear ist und bestimmen Sie Kern D und Bild D. Hinweis: Bei diesem Beispiel müssen Sie Ihr Wissen aus der Analysis – Einführungsvorlesung verwenden.

62) Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ linear und $w \in W$. Zeigen Sie: Wenn es ein $v_0 \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v_0) = w$ gibt, so ist die Menge der Lösungen x der Gleichung $\varphi(x) = w$ gegeben durch $\{v_0 + u \mid u \in \operatorname{Kern} \varphi\}$. Welche bekannte Tatsache aus der Analysis erhält man, wenn man $V = W = C^\infty(I)$ setzt und als Abbildung φ die Ableitung $D(f) = f'$ wählt?

63) Beweisen Sie, daß $\varphi : M_{m,n}(K) \to M_{n,m}(K)$, $A \mapsto A^t$ ein Isomorphismus ist.

64) Es seien V, W_1 und W_2 drei K-Vektorräume und $\varphi : W_1 \to W_2$ linear. Beweisen Sie, daß die Abbildung $\varphi_* : L(V, W_1) \to L(V, W_2)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$ linear ist (d.h. $\varphi_*(\psi) = \varphi \circ \psi$).

65) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von φ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Kern} \varphi$.

66) Ist der Endomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, der durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, injektiv bzw. surjektiv?

67) Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Beweisen Sie:
a) $\dim_K V < \dim_K W \iff$ Es gibt keine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, die surjektiv ist.
b) $\dim_K V > \dim_K W \iff$ Es gibt keine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, die injektiv ist.

68) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Bild} \varphi$. Beweisen Sie, daß $\dim_K V$ gerade ist und geben Sie ein Beispiel einer solchen Abbildung an.

69) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = 0$ (d.h. $\varphi(\varphi(v)) = \mathbf{o}$ für alle $v \in V$) und es gelte $\dim_K V = 2 \cdot \operatorname{Rang} \varphi$. Beweisen Sie, daß dann $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Bild} \varphi$ gelten muß.

70) Es sei V ein K-Vektorraum und der Endomorphismus $\varphi : V \to V$ habe die Eigenschaft $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Beweisen Sie, daß $V = (\operatorname{Kern} \varphi) \oplus (\operatorname{Bild} \varphi)$. Hinweis: Verwenden Sie, daß $v = \varphi(v) + (v - \varphi(v))$ für jedes $v \in V$ gilt.

71) Finden Sie für die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die durch

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+x_3 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, die Matrixdarstellung $[\varphi]_{B,C}$, wenn

a) B und C die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnen.

b) B und C die folgenden beiden Basen bezeichnen:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Benützen Sie beide Darstellungen, um $\varphi\big((1,2,3)^t\big)$ zu berechnen.

72) Es seien V und W zwei endlichdimensionale K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie, daß es Basen B von V und C von W gibt, sodaß

$$[\varphi]_{B,C} = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0}_{r,n-r} \\ \mathbf{0}_{m-r,r} & \mathbf{0}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Damit ist gemeint, daß sich in der linken oberen Ecke von $[\varphi]_{B,C}$ eine $r \times r$-Einheitsmatrix (mit $r = \operatorname{Rang}\varphi$) befindet und die restliche Matrix mit Nullen aufgefüllt ist. Die drei $\mathbf{0}$ bezeichnen also die (verschiedenen) Nullmatrizen in $M_{r,n-r}(K)$, $M_{m-r,r}(K)$ bzw. $M_{m-r,n-r}(K)$ wobei $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Für den Beweis kann man ähnlich wie im Beweis von Satz 4.12 vorgehen.

73) Es seien $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = e^x$ und $W = [f_1, f_2, f_3]$, d.h. W ist der von f_1, f_2 und f_3 aufgespannte Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß $B = \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von W ist und bestimmen Sie die Matrix $[D]_{B,B}$. Dabei bezeichnet $D : W \to W$ wieder den Differentialoperator $D(f) = f'$ (d.h. $D(f)$ ist die Ableitung von f).

74) Die Abbildung $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ sei gegeben durch $\varphi(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß φ linear ist,

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen von $M_2(\mathbb{R})$ sind und bestimmen Sie die Matrix $[\varphi]_{B,C}$.

75) Die beiden linearen Abbildungen $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien durch

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1-x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie explizite Formeln für die Abbildungen $\varphi + 2\psi$, $\varphi \circ \psi$, $\psi \circ \varphi$ und $\varphi^2 (= \varphi \circ \varphi)$ sowie ihre Matrizendarstellungen bezüglich der Basen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

76) Es seien U, V und W drei endlichdimensionale K-Vektorräume und die Abbildungen $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ seien linear. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\operatorname{Rang}(\psi \circ \varphi) \leq \min\{\operatorname{Rang}\psi, \operatorname{Rang}\varphi\}.$$

77) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasen B bzw. C von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ die Matrixdarstellung

$$[\varphi]_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Basen

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

78) Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi, \psi : V \to V$ zwei lineare Abbildungen. Beweisen Sie: Es gibt genau dann zwei Basen B, C von V mit der Eigenschaft, daß $[\varphi]_{B,B} = [\psi]_{C,C}$ wenn es einen Automorphismus $\alpha : V \to V$ mit der Eigenschaft $\psi = \alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha$ gibt. Hinweis: In welcher Beziehung müssen B und C stehen, damit $[\alpha]_{C,B} = I_n$ gilt (wobei $n = \dim_K V$)?

79) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

a) $$\begin{aligned} x_1-2x_2-x_3 &= -1 \\ 2x_1+3x_2+x_3 &= 0 \\ x_1+4x_2+x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &= -1 \\ 6x_1+x_2+x_3 &= -4 \\ 2x_1-3x_2-x_3 &= 0 \\ -x_1-7x_2-2x_3 &= 7 \\ x_1-x_2 &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &= 1 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_5 &= 2 \\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4+x_5 &= 1 \end{aligned}$$

80) Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über $\mathbb{C}$:

a) $$\begin{aligned} ix_1+(2+i)x_2 &= 1 \\ x_1+(2-i)x_2 &= 1+i \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1+ix_2+(1+i)x_3 &= 1 \\ x_1-2x_2+ix_3 &= 0 \\ -ix_1+x_2-(2-i)x_3 &= 1 \end{aligned}$$