Reelle Analysis in mehreren und komplexe Analysis in einer Variable für LAK
WS 2010/11

Christoph Baxa

80) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - e^{-n^2})$

81) Welche der folgenden Reihen konvergieren?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$

82) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{4^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

83) Berechnen Sie die Summen der folgenden Reihen mit Hilfe von Teleskopsummen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

84) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{n})$ c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$

85) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden beiden Reihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$

86) Untersuchen Sie mit Hilfe des Verdichtungssatzes: Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}?$$

87) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^{n-1}}$

88) Konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \frac{1}{2})^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

89) Die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^{n-1}} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots$$

ist mit Hilfe des Wurzelkriteriums, nicht aber mit dem Quotientenkriterium erkennbar.

90) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+4}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log(1 + \frac{3}{n})$

91) Untersuchen Sie nochmals die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}},$$

diesmal mit dem Cauchyschen Integralkriterium.

92) Sind die folgenden Reihen konvergent bzw. absolut konvergent? Was folgt daraus für die möglichen Werte von Umordnungen?

a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$ c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \log n}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+13}}$

93) Beweisen Sie mittels eines Produkts zweier Reihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n = \frac{1}{(1-q)^2}$ für $|q| < 1$.

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} q^n = \frac{1}{(1-q)^3}$ für $|q| < 1$.

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

94) Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Konvergiert diese Funktionenfolge auf $\mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig? Konvergieren $\frac{1}{n} f_n$ bzw. f_n^2 auf $\mathbb{R}$ punktweise bzw. gleichmäßig?

95) Es sei $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Zeigen Sie: Diese Funktionenfolge ist gleichmäßig konvergent, wenn man f_n auf $[0, q]$ einschränkt (mit $0 < q < 1$), nicht aber auf $[0, 1]$.

96) Es sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$. Zeigen Sie: Diese Funktionenfolge konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ und sie konvergiert gleichmäßig auf $[-q, q]$ (wobei $0 < q < 1$). Konvergiert sie gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$?

97) Zeigen Sie: Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1-x)$ ist auf $(-1, 1]$ punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergent.

98) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)2^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(1-(-2)^n\big)x^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}x^n$

99) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3)x^n$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}x^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n-1)}x^n$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log n \cdot x^n$

100) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^{n^2}x^n$ (mit $a \in \mathbb{R}$) b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b^{\sqrt{n}}x^n$ (mit $b > 0$) c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{e^n+e^{-n}}{2}x^n$

101) Zeigen Sie $\frac{1}{2-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$ für $|x| < 2$.

102) Bestimmen Sie Konvergenzradius und Summe der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n nx^n$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}x^n$ d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)!}$

103) Bestimmen Sie Konvergenzradius und Summe der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+2)x^n$ b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n+3}$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n+1)(2x)^{2n}$

104) Beweisen Sie: Besitzt die ungerade Funktion f um 0 die Potenzreihenentwicklung $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ (mit Konvergenzradius $R \neq 0$), so gilt $a_k = 0$ für alle geraden k.

105) Zeigen Sie mittels Koeffizientenvergleichs

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n} + \binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1} + \cdots + \binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$ ganz. Leiten Sie daraus ab, daß

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

106) Zeigen Sie

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

für $|x| < 1$ und $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

107) Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$:

a) $a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log a)^n}{n!} x^n$ b) $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ c) $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

108) Beweisen Sie für die folgende Erweiterung der Binomialkoeffizienten (mit $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } \binom{\alpha}{0} := 1$$

Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $k \geq 0$ gelten:

a) $(k+1)\binom{\alpha}{k+1} = \alpha\binom{\alpha-1}{k}$ b) $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$

109) Beweisen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die folgenden Gleichungen:

a) $\binom{1/2}{k} = (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$ b) $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2k)}$

110) Beweisen Sie

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Hinweis: Integrieren Sie die Bionomialreihe mit $\alpha = -\frac{1}{2}$ und $-x^2$ statt x.

111) Beweisen Sie die folgenden beiden Potenzreihenentwicklungen für $|x| < 1$:

a) $\operatorname{Artanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ b) $\operatorname{Arsinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

112) Beweisen Sie

a) $\lim_{k \to \infty} \frac{(k!)^2 2^{2k}}{(2k)! \sqrt{k}} = \sqrt{\pi}$ b) $\lim_{k \to \infty} \binom{2k}{k} \frac{\sqrt{\pi k}}{2^{2k}} = 1.$

113) a) Beweisen Sie $2I_n = \Gamma(\frac{n+1}{2})$ mit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$ wie im Beweis von Satz 5.4.
b) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ die Gleichung

$$\Gamma(n + \tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.$$

c) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die *Verdoppelungsformel* $\Gamma(2n)\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

114) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind:

a) $(-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$ b) $(0, 2] \cup [1, 3)$ c) $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

115) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind:

a) $\{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ b) $\{e\} \cup \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + \frac{1}{2}]$

116) Schreiben Sie $\{0\} \cup \{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt (unendlich vieler) abgeschlossener Mengen.

117) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$, sowie $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in B_r(\mathbf{x})$. Zeigen Sie, dass die "offene Kugel mit Löchern" $B_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ offen ist.

118) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: M ist genau dann beschränkt, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodass $M \subseteq [-N, N]^k$.

119) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: M ist genau dann beschränkt, wenn es $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und ein $r > 0$ gibt, sodass $M \subseteq B_r(\mathbf{x})$.

120) Welche der Mengen aus den Beispielen 114 bzw. 115 sind kompakt?

121) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gegeben. Geben Sie offene (bzw. abgeschlossene) Mengen an, deren Urbild unter f bzw. g nicht offen (bzw. abgeschlossen) ist.

122) Zeigen Sie, dass die Menge A abgeschlossen ist, indem sie sie als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung darstellen.

a) $A = \overline{B_r(\mathbf{x})}$ (mit $r > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$) b) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

123) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktionen

a) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$
b) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$
c) $f(x,y,z) = xyz\sin(x+y+z)$
d) $f(x,y,z) = \frac{xe^y}{z}$ (mit $z \neq 0$)

124) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und berechnen Sie sie.

125) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

126) Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist durch $PV = cT$ gegeben. Dabei bezeichnen P den Druck, V das Volumen und T die Temperatur, c ist eine Konstante. Zeigen Sie

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

(und nicht 1, wie man durch "Kürzen" erhalten würde).

127) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\mathbf{a} \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ mögen in $\mathbf{a}$ einen Gradienten besitzen. Dann besitzen auch $f+g$, αf (mit $\alpha \in \mathbb{R}$), fg und f/g (soferne $g(\mathbf{a}) \neq 0$) dort einen Gradienten und es gilt dort:

a) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$ b) $\operatorname{grad}(\alpha f) = \alpha \operatorname{grad} f$
c) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$ d) $\operatorname{grad}(\frac{f}{g}) = \frac{1}{g^2}(g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g)$

128) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische $n \times n$ – Matrix mit reellen Eintragungen (d.h. es gelte $a_{ij} = a_{ji}$ für $1 \leq i,j \leq n$). Beweisen Sie, dass für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$ die Gleichung $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ gilt.

129) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{u}$, soferne sie existiert:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{x} = (1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
b) $f(x,y) = \sin(xy)$, $\mathbf{x} = (1,0)$, $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$
c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{x} = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$

130) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Zeigen Sie: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, und zwar auch für $x = y = 0$. Daraus folgt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

131) Berechnen Sie die Ableitung $f'(x,y)$ bzw. $f'(x,y,z)$ für die folgenden Funktionen:
a) $f(x,y) = (x^2 y, e^{-xy})$ b) $f(x,y,z) = (e^{xy}, z \sin x, y \cos x)$ c) $f(x,y) = (x^3 y^2, xy, y^4)$

132) Beweisen Sie direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit: Ist $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ eine lineare Abbildung, so ist L differenzierbar. Was ist die Ableitung von L?

133) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^\ell$ mit $f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_\ell(\mathbf{x})\big)$. Beweisen Sie, dass f genau dann in $\mathbf{a}$ differenzierbar ist, wenn die Abbildungen $f_1, \dots, f_\ell : U \to \mathbb{R}$ alle in $\mathbf{a}$ differenzierbar sind.

134) Es sei $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$ und $g(u,v) = (u+v, uv^2)$. Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'(1,1)$ mit Hilfe der Kettenregel und direkt.

135) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f, g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in U$ und f und g seien in $\mathbf{a}$ differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass auch $f \cdot g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar ist und dass

$$(f \cdot g)'(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big) + g(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big).$$

b) Ist $g(\mathbf{a}) \neq 0$, so ist auch $f/g : U \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ in $\mathbf{a}$ differenzierbar und

$$(f/g)'(\mathbf{a}) = \frac{1}{g(\mathbf{a})^2}\Bigg(g(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big) - f(\mathbf{a})\Big(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{a})\Big)\Bigg).$$

Hinweis: Es geht in diesem Beispiel nicht nur darum, die Jacobischen Matrizen der Abbildungen $f \cdot g$ bzw. f/g zu berechnen, sondern es soll auch gezeigt werden, dass diese Abbildungen in $\mathbf{a}$ differenzierbar sind. Das kann man direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit herleiten, man kann aber auch die Kettenregel benützen und z.B. in a) die Abbildung $f \cdot g$ als Zusammensetzung der beiden Abbildungen $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto \big(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})\big)$ und $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 y_2$ auffassen.

136) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}^\ell$, $a \in I$ und f und g seien in a differenzierbar. Zeigen Sie: Dann ist auch die Abbildung $h : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle = \sum\limits_{j=1}^{\ell} f_j(x) g_j(x)$ in a differenzierbar und

$$h'(a) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j(a) g_j'(a) + \sum_{j=1}^{\ell} f_j'(a) g_j(a).$$

Hinweis: Auch in diesem Beispiel ist der Beweis der Differenzierbarkeit ebenso wichtig wie die Formel für die Ableitung.

137) Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) := \sin(xy)$ und $g(x, y) := e^{x+y}$. Berechnen Sie f' und g' und daraus mit Hilfe der Rechenregeln für die Ableitung:

a) $(f + g)'$ b) $(2f)'$ c) $(f \cdot g)'$ d) $(f/g)'$

138) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn sie $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$ für alle $t > 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ erfüllt. Zeigen Sie den folgenden *Satz von Euler:* Ist f homogen vom Grad α und differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\, x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, x_k = \alpha f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: Es sei $g(t) = f(t\mathbf{x})$ für festes $\mathbf{x}$ und $t > 0$. Berechnen Sie $g'(1)$ auf zwei Arten.

139) Berechnen Sie nochmals die Richtungsableitungen aus Bsp. 129), diesmal mit Hilfe von Satz 7.20 aus der Vorlesung, d.h. mittels $\operatorname{grad} f$.

140) Die quadratische Form $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$q(x, y) := (x \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Beweisen Sie: Wenn $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 < 0$ gilt, ist q indefinit.

141) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$),
b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ (mit $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$),
c) $f(x, y) = 1/y - 1/x - 4x + y$ (mit $x, y \neq 0$),
d) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$).

142) Gegeben seien die n Punkte $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^k$. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_n\|^2$ bei $\mathbf{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i$ ein Minimum annimmt.

143) Beweisen Sie: Wenn $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dann gilt $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$, wobei Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$ gilt. Hinweis: Cauchy – Schwarzsche Ungleichung.

144) Gegeben seien n Punktepaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, die man durch Messungen erhalten hat und für die von einer Theorie eine lineare Beziehung $y = kx + d$ voraussagt wird. Da die Messungen fehlerbehaftet sind, sucht man eine *Ausgleichsgerade*, d.h. Werte für k und d, durch die der Fehler möglichst klein wird. Zu diesem Zweck betrachtet man die Funktion $f(k, d) := \sum_{i=1}^n (kx_i + d - y_i)^2$ und untersucht, für welche Werte von k und d sie ihr Minimum annimmt. (Diese Vorgangsweise wird *Methode der kleinsten Quadrate* genannt.) Beweisen Sie, dass man (unter einer vernünftigen Zusatzannahme – nämlich welcher?) auf diese Weise folgende Werte erhält:

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

145) Berechnen Sie $\int_Q f(x, y) \, d(x, y)$ für

a) $Q = [0, 2] \times [3, 4]$, $f(x, y) = 2x + 3y$
b) $Q = [0, 1]^2$, $f(x, y) = xy + y^2$
c) $Q = [1, 2]^2$, $f(x, y) = e^{x+y}$
d) $Q = [0, \frac{\pi}{2}]^2$, $f(x, y) = \sin(x + y)$

146) Berechnen Sie $\int_Q f(x, y, z) \, d(x, y, z)$ für

a) $Q = [1, 2] \times [2, 3] \times [0, 2]$, $f(x, y, z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$
b) $Q = [0, 1]^3$, $f(x, y, z) = \frac{x^2 z^3}{1+y^2}$

147) Berechnen Sie das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x + y$ und dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$ (in der xy-Ebene).

148) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der oben vom Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und unten vom Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ (in der xy-Ebene) begrenzt wird.

149) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und oberhalb des Quadrats $[0, 2] \times [0, 2]$ (in der xy-Ebene) liegt.

150) Berechnen Sie
$$\int_A x^2 y \, d(x,y),$$
wobei A die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Nullpunkt sei.

151) Berechnen Sie
$$\int_A (x + y^2) \, d(x,y),$$
wobei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ sei.

152) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von der Fläche $z = xy$, dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ und der Ebene $x + y = 1$ begrenzt wird?

153) Die Menge $B \subseteq \mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten gegeben durch $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 2\pi$ und $0 \leq r \leq \rho(\varphi)$, wobei $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ positiv und stetig sei. Zeigen Sie mittels der Substitutionsformel für Polarkoordinaten, daß
$$v(B) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) \, d\varphi.$$
Folgern Sie daraus: Ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel α hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} r^2 \alpha$.

154) Es seien $a, b > 0$. Beweisen Sie, daß die Ellipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ den Flächeninhalt $ab\pi$ besitzt. Benutzen Sie dazu die verallgemeinerten Polarkoordinaten $(x,y) = \big(ar\cos(\varphi), br\sin(\varphi)\big)$ mit Funktionaldeterminante abr.

155) Die Neilsche Parabel $y^2 = x^3$ besitzt oberhalb der x-Achse die Parametrisierung $f(t) = (t, t^{3/2})$. Berechnen Sie ihre Bogenlänge für $f : [0,b] \to \mathbb{R}^2$.

156) Eine Lemniskate ist die Menge aller Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit der folgenden Eigenschaft: Das Produkt des Abstandes von (x,y) zum Punkt $(a,0)$ mit dem Abstand von (x,y) zum Punkt $(-a,0)$ ist a^2 (wobei $a > 0$). Leiten Sie daraus die Lemniskatengleichung $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ ab. Zeigen Sie weiters: Führt man Polarkoordinaten ein, so ergibt sich daraus die Gleichung $r = a\sqrt{2\cos(2\varphi)}$ für $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ bzw. $\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$.

157) Berechnen Sie die Länge der Archimedischen Spirale, deren Gleichung in Polarkoordinaten durch $r = \varphi$ gegeben ist für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.