# Übungen zu Algebraische Strukturen, WS 2012/13

*Christoph Baxa*

**1)** Beweisen Sie, dass die folgenden Mengen mit der Matrizenmultiplikation Gruppen sind (wobei $K$ einen Körper bezeichnet):

a) $\mathrm{GL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\} = \{A \in M_n(K) \mid \det A \neq 0\}$,
b) $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$,
c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^t\}$,
d) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = \bar{A}^t\}$.

**2)** Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge und $S_X = \{f : X \to X \mid f \text{ ist bijektiv}\}$. Ist $X = \{1, \dots, n\}$, so schreibt man $S_n$ statt $S_{\{1,\dots,n\}}$.

a) Zeigen Sie, dass $(S_X, \circ)$ eine Gruppe ist.
b) Zeigen Sie $|S_n| = n!$.
c) Für welche $n$ ist $S_n$ abelsch? Begründen Sie Ihre Behauptung.

**3)** Beweisen Sie: Ist $G$ eine abelsche Gruppe, $a_1, \dots, a_n \in G$ und $\sigma \in S_n$, so gilt

$$a_1 \cdots a_n = a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)}.$$

**4)** Es sei $G$ eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) Erfüllt $a \in G$ die Beziehung $a \cdot a = a$, so ist $a = e$.
b) Für $a, b \in G$ existieren eindeutig bestimmte $x, y \in G$, derart dass $ax = b$ und $ya = b$

**5)** Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ genau dann eine Gruppe ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

a) $\forall\, a, b, c \in G :\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
b) $\exists\, e \in G\ \ \forall\, a \in G :\ e \cdot a = a$ (d.h. $e$ ist linksneutrales Element),
c) $\forall\, a \in G\ \ \exists\, a^{-1} \in G : a^{-1} \cdot a = e$ (d.h. $a^{-1}$ ist linksinverses Element).

**6)** Es sei $G$ eine Gruppe. Beweisen Sie: Gilt $a^2 = e$ für alle $a \in G$, so ist abelsch.

**7)** Es sei $G$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $G$ ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^2 = a^2 b^2$ für alle $a, b \in G$ gilt.
b) $G$ ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1}$ für alle $a, b \in G$ gilt.
c) $G$ ist genau dann abelsch, wenn $(ab)^n = a^n b^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $a, b \in G$ gilt.

**8)** Gegeben sei das Quadrat mit den Eckpunkten $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ und $(-1,-1)$ (im $\mathbb{R}^2$). Betrachten Sie die Menge $D_4^* = \{I, R, R^2, R^3, S_0, S_1, S_2, S_3\}$ von Bijektionen des Quadrats. Dabei bezeichne $I$ die Identität, $R$ die Drehung um 90° im Uhrzeigersinn um den Ursprung, $S_0$ die Spiegelung an der Gerade $y = x$, $S_1$ die Spiegelung an der $y$-Achse, $S_2$ die Spiegelung an der Gerade $y = -x$ und $S_3$ die Spiegelung an der $x$-Achse.

a) Schreiben Sie eine Multiplikationstafel von $D_4^*$.
b) Beweisen Sie, dass $D_4^*$, versehen mit der Verknüpfung von Abbildungen, eine nicht-abelsche Gruppe bildet (die Symmetriegruppe des Quadrats).

**9)** Es seien $G_1, \ldots, G_n$ Gruppen. Beweisen Sie, dass $G_1 \times \cdots \times G_n$ mit der Verknüpfung $(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1b_1, \ldots, a_nb_n)$ eine Gruppe ist.

**10)** a) Es sei $p$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/p^n \mid a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
b) Es sei $p$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass $\{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist.
c) Beweisen Sie, dass $\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
d) Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}) := \{A \in M_2(\mathbb{Z}) \mid \det A \in \{1, -1\}\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ (mit der Matrizenmultiplikation) ist.

**11)** Schreiben Sie eine Multiplikationstafel der *Kleinschen Vierergruppe* $V_4 = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und finden Sie alle Untergruppen von $V_4$.

**12)** Es sei $G$ eine Gruppe und $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$ sei endlich. Beweisen Sie, dass $H$ genau dann eine Untergruppe von $H$ ist, wenn $ab \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt.

**13)** Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}_{32}^*$ von den Restklassen von 5 und -1 erzeugt wird.

**14)** Beweisen Sie, dass die Gruppe $D_4^*$ (aus Beispiel 8) von $R$ und $S_0$ erzeugt wird. Zeigen Sie zu diesem Zweck

$$D_4^* = \left\{R^j S_0^i \mid i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2,3\}\right\}.$$

**15)** Es bezeichne, analog zu Beispiel 8, $D_3^*$ die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Finden Sie die Elemente von $D_3^*$ und beweisen Sie analoge Eigenschaften wie in den Beispielen 8 und 13. Kennen Sie eine Gruppe, deren Strukur der von $D_3^*$ gleicht?

**16)** Die *Quaternionengruppe* $Q_8 := \langle A, B\rangle$ sei die von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Beweisen Sie:

a) $A^4 = B^4 = I_2$, wobei $I_2$ die $2\times 2$-Einheitsmatrix bezeichnet,
b) $BA = A^3 B$,
c) $Q_8$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8.

**17)** Bestimmen Sie die Ordnung aller Elemente der Gruppen a) $\mathbb{Z}_{12}$ b) $\mathbb{Z}_{12}^*$ c) $S_3$.

**18)** Es sei $G$ eine Gruppe und $a, b \in G$. Beweisen Sie

a) $\mathrm{ord}(a^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$, b) $\mathrm{ord}(ab) = \mathrm{ord}(ba)$, c) $\mathrm{ord}(bab^{-1}) = \mathrm{ord}(a)$.

**19)** Es sei $G$ eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie, dass $H := \{a \in G \mid \mathrm{ord}(a) \text{ ist endlich}\}$ eine Untergruppe von $G$ ist.

**20)** a) Betrachten Sie die Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ mit der Matrizenmultiplikation und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathrm{ord}(A) = 4$ und $\mathrm{ord}(B) = 3$ gilt, aber $AB$ unendliche Ordnung besitzt.
b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, die beide unendliche Ordnung besitzen, aber deren Summe $a + b$ endliche Ordnung hat.

**21)** Die Abbildungen $\sigma, \tau \in S_3$ seien gegeben durch $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ und $\sigma(3) = 1$ bzw. $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ und $\tau(3) = 3$. Betrachten Sie die Untergruppen $H = \{\varepsilon, \tau\}$ und $K = \{\varepsilon, \sigma, \sigma^2\}$ der Gruppe $S_3$ (wobei $\varepsilon$ das neutrale Element von $S_3$ bezeichnen soll). Bestimmen Sie die Zerlegung von $S_3$ in Links- bzw. Rechtsnebenklassen nach $H$ und $K$ und entscheiden Sie, ob $H$ bzw. $K$ ein Normalteiler von $S_3$ ist.

**22)** Es sei $G$ eine Gruppe und $M \subseteq G$, $M \neq \varnothing$. Beweisen Sie, dass die Relation

$$a \sim b :\Longleftrightarrow ab^{-1} \in M$$

genau dann eine Äquivalenzrelation auf $G$ ist, wenn $M \leq G$.

**23)** Es sei $G$ eine Gruppe, $H \leq G$ und $K \leq G$. Beweisen Sie, dass die Relation $\approx$, die durch $a \approx b :\Longleftrightarrow \exists h \in H\, \exists k \in K : b = hak$ gegeben ist, eine Äquivalenzrelation auf $G$ ist, deren Äquivalenzklassen die Doppelnebenklassen $HaK = \{hak \mid h \in H, k \in K\}$ sind.

**24)** Beweisen Sie, dass die folgenden Abbildungen Homomorphismen $\varphi : G \to H$ sind und bestimmen Sie, welche davon Monomorphismen, Epimorphismen bzw. Isomorphismen sind:

a) Die Gruppen $G$ und $H$ seien $\big((0,+\infty),\cdot\big)$ und $(\mathbb{R},+)$ und $\varphi(x) = \log x$.
b) Die Gruppen $G$ und $H$ seien $\big(M_n(K),+\big)$ und $(K,+)$ und $\varphi(A) = \mathrm{Spur}(A)$ (wobei $K$ einen Körper bezeichnet).
c) Die Gruppen $G$ und $H$ seien $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ und

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}, a^2+b^2 \neq 0\right\}$$

mit der Matrizenmultiplikation und $\varphi(a+bi) = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right)$.

**25)** Es sei $G$ eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ ist genau dann ein Automorphismus wenn $G$ abelsch ist,
b) $\varphi : G \to G$, $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Endomorphismus wenn $G$ abelsch ist.

**26)** Es seien $G$ und $H$ Gruppen, $M \subseteq G$ sei ein Erzeugendensystem von $G$ und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie, dass $\varphi$ durch die Werte $\varphi(x)$ mit $x \in M$ eindeutig bestimmt ist.

**27)** Es seien $G, H$ und $K$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ und $\psi : H \to K$ zwei Abbildungen. Beweisen Sie:

a) Sind $\varphi$ und $\psi$ Homomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Homomorphismus.
b) Sind $\varphi$ und $\psi$ Monomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Monomorphismus.
c) Sind $\varphi$ und $\psi$ Epimorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Epimorphismus.
d) Sind $\varphi$ und $\psi$ Isomorphismen, so ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Isomorphismus.

**28)** Es seien $G$ und $H$ zwei Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) Ist $\varphi$ ein Isomorphismus, so ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : H \to G$ ebenfalls ein Isomorphismus.
b) Der Homomorphismus $\varphi$ ist genau dann ein Isomorphismus wenn es einen Homomorphismus $\psi : H \to G$ mit den Eigenschaften $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_G$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_H$ gibt.

**29)** Es seien $G$ und $H$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) Wenn $A \leq G$ dann $\varphi(A) \leq H$.
b) Wenn $B \leq H$ dann $\varphi^{-1}(B) \leq G$.

**30)** Es seien $G$ und $H$ Gruppen und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) $\ker \varphi \trianglelefteq G$ und $\operatorname{Im} \varphi \leq H$.
b) $\operatorname{Im} \varphi$ muss kein Normalteiler von $H$ sein.
c) $\varphi$ ist genau dann ein Monomorphismus wenn $\ker \varphi = \{e\}$.

**31)** Es sei $G$ eine Gruppe. Beweisen Sie:

a) $Z(G) \trianglelefteq G$,
b) $\big(\operatorname{Aut}(G), \circ\big)$ ist eine Gruppe,
c) $\operatorname{Inn}(G) \trianglelefteq \operatorname{Aut}(G)$,
d) $G/Z(G) \cong \operatorname{Inn}(G)$.

**32)** a) Beweisen Sie: Ist $G$ eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, so ist

$$\{e\} \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G/N \longrightarrow \{e\}$$

eine exakte Folge, wobei $\iota : N \to G$ die Einbettung bezeichnet und $\pi : G \to G/N$ die übliche Projektion.
b) Ist

$$\{e\} \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \longrightarrow \{e\}$$

eine exakte Folge, so gibt es ein $N \trianglelefteq G_2$ mit $N \cong G_1$. Identifiziert man $G_1$ mit $N$, so gilt $G_2/G_1 \cong G_3$.

**33)** Es seien $G_1, \dots, G_n$ Gruppen und $N_i \trianglelefteq G_i$ für $1 \leq i \leq n$. Beweisen Sie, dass $N_1 \times \cdots \times N_n \trianglelefteq G_1 \times \cdots \times G_n$ und dass

$$(G_1 \times \cdots \times G_n)/(N_1 \times \cdots \times N_n) \cong (G_1/N_1) \times \cdots \times (G_n/N_n).$$

**34)** Es sei $G$ eine Gruppe und $H \leq G$. Beweisen Sie $aHa^{-1} \leq G$ und $aHa^{-1} \cong H$ für alle $a \in G$.

**35)** Es sei $G$ eine endliche Gruppe und $H \leq G$ mit Ordnung $n = |H|$. Beweisen Sie, dass $H \trianglelefteq G$, wenn $H$ die einzige Untergruppe der Ordnung $n$ von $G$ ist.

**36)** Beweisen Sie: Ist $p$ eine Primzahl und $G$ eine Gruppe der Ordnung $|G| = p$, so ist $G$ eine zyklische Gruppe (und daher isomorph zur Gruppe $\mathbb{Z}_p$).

**37)** a) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 4 zu $\mathbb{Z}_4$ oder $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ isomorph ist.
b) Beweisen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung $\leq 5$ abelsch ist.

**38)** Es sei $G$ eine Gruppe und $H \leq G$ mit der Eigenschaft $[G : H] = 2$. Zeigen Sie $H \trianglelefteq G$.

**39)** a) Finden Sie alle Elemente der Gruppe $Q_8$, die Ordnung 2 besitzen.
b) Beweisen Sie, dass jede Untergruppe der Gruppe $Q_8$ Normalteiler von $Q_8$ ist.
c) Bestimmen Sie (die Struktur von) $Q_8/N$ für alle $N \trianglelefteq Q_8$ (d.h. geben Sie eine bekannte Gruppe $G$ mit der Eigenschaft $Q_8/N \cong G$ an).

*Hinweis.* Beachten Sie, dass in b) und c) nicht verlangt wird, dass Sie alle Untergruppen der $Q_8$ bestimmen.

*Bemerkung.* Nichtabelsche Gruppen mit der Eigenschaft, dass jede ihrer Untergruppen bereits Normalteiler ist, werden als Hamiltonsche Gruppen bezeichnet.

**40)** Schreiben Sie die folgenden Permutationen aus $S_9$ als Produkt elementfremder Zyklen und bestimmen Sie ihr Signum.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 8 & 9 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ (4\,5\,6) \circ (5\,6\,7) \circ (6\,7\,1) \circ (1\,2\,3) \circ (2\,3\,4) \circ (3\,4\,5)$$

$$\text{d)}\ (1\,4\,7\,6\,2) \circ (2\,4\,3) \circ (4\,5\,8\,1)$$

**41)** Es sei $(i_1 \dots i_r) \in S_n$ ein Zyklus und $\sigma \in S_n$ beliebig. Beweisen Sie, dass

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_r) \circ \sigma^{-1} = \big(\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)\big).$$

**42)** Zeigen Sie, dass $S_n = \big\langle (1\,2), (1\,2 \dots n) \big\rangle$ für alle $n \geq 3$.

**43)** Beweisen Sie, dass $N := \big\{\varepsilon, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\big\}$ Normalteiler der Gruppen $S_4$ und $A_4$ ist und bestimmen Sie (die Struktur von) $A_4/N$.

**44)** a) Bestimmen Sie $Z(S_1)$ und $Z(S_2)$.
b) Beweisen Sie, dass $Z(S_n) = \{\varepsilon\}$ für alle $n \geq 3$.
c) Bestimmen Sie (die Struktur von) $\mathrm{Inn}(S_n)$ für alle $n \geq 1$.

**45)** Beweisen Sie, dass a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ und b) $\mathrm{Aut}(S_3) \cong S_3$.

**46)** Es sei $n \geq 3$ und $\alpha = (1\,2 \dots n) \in D_n$ wie in Satz 48. Beweisen Sie, dass $\langle \alpha \rangle \trianglelefteq D_n$ und bestimmen Sie (die Struktur von) $D_n/\langle \alpha \rangle$.

**47)** Es seien $G_1, \dots, G_n$ Gruppen. Beweisen Sie:

a) Ist $\sigma \in S_n$, so ist $G_{\sigma(1)} \times \cdots \times G_{\sigma(n)} \cong G_1 \times \cdots \times G_n$.
b) Sind $H_1, \dots, H_n$ Gruppen mit der Eigenschaft $H_i \cong G_i$ (für $1 \leq i \leq n$), so ist

$$G_1 \times \cdots \times G_n \cong H_1 \times \cdots \times H_n.$$

**48)** Ist die Gruppe $S_3$ inneres direktes Produkt von zwei ihrer Untergruppen $N_1, N_2$ (mit $N_1, N_2 \neq \{\varepsilon\}$ und $N_1, N_2 \neq S_3$)?

**49)** Finden Sie Gruppen $G_1, G_2, H_1$ und $H_2$ mit der Eigenschaft, dass $G_1 \times G_2 \cong H_1 \times H_2$ aber $G_i \ncong H_j$ für $i, j \in \{1, 2\}$.

**50)** Es sei $I \neq \varnothing$ eine Menge und $G_i$ eine Gruppe für alle $i \in I$. Es bezeichne $e_i$ das neutrale Element der Gruppe $G_i$ und

$$\prod_{i \in I}^{w} G_i := \left\{ (x_i)_{i \in I} \,\middle|\, x_i \in G_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } x_i = e_i \text{ für alle bis auf endlich viele } i \right\}.$$

Beweisen Sie

$$\prod_{i \in I}^{w} G_i \trianglelefteq \prod_{i \in I} G_i.$$

**51)** Es seien $N$ und $H$ Gruppen und $\theta : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto \theta_h$ ein Homomorphismus (d.h. $\theta_{h_1 h_2} = \theta_{h_1} \circ \theta_{h_2}$ für alle $h_1, h_2 \in H$). Beweisen Sie (mit neutralen Elementen $e_N$ und $e_H$):

a) Versieht man $N \times H$ mit der Verknüpfung $(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1 \cdot \theta_{h_1}(n_2), h_1 h_2)$, so wird dadurch eine Gruppe definiert, die man mit $N \rtimes_\theta H$ bezeichnet.
b) Bezeichnen $N^* = \{(n, e_H) \mid n \in N\}$ und $H^* = \{(e_N, h) \mid h \in H\}$, so gelten $H^* \cong H$, $N^* \cong N$, $H^* \leq N \rtimes_\theta H$, $N^* \trianglelefteq N \rtimes_\theta H$, $N^* \cap H^* = \{(e_N, e_H)\}$ und $N^* H^* = N \rtimes_\theta H$.

*Bemerkung.* Die Gruppe $N \rtimes_\theta H$ wird als semidirektes Produkt von $N$ und $H$ bezeichnet. Ist $\theta_h = \mathrm{id}_N$ für alle $h \in H$, so erhält man als Spezialfall das (äußere) direkte Produkt der Gruppen $N$ und $H$.

**52)** Es sei $R$ ein Ring. Beweisen Sie:

a) $(-a)(-b) = ab$ für alle $a, b \in R$,
b) $a(b - c) = ab - ac$ und $(a - b)c = ac - bc$ für alle $a, b, c \in R$,
c) $(na)b = a(nb) = n(ab)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $a, b \in R$,
d) für alle $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in R$ gilt

$$\left( \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left( \sum_{j=1}^{m} b_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j.$$

**53)** Es sei $R$ ein kommutativer Ring mit 1, $a, b \in R$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz (wobei man $0^0 = 1$ setzt)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

**54)** Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit 1. Beweisen Sie, dass die Kommutativität der Addition in $R$ bereits aus den übrigen Axiomen folgt. *Hinweis.* Berechnen Sie $(a+b)(1+1)$ auf zwei Arten.

**55)** Es sei $V$ der (reelle) Vektorraum der reellen Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ (mit den Verknüpfungen $(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} := (a_n + b_n)_{n\geq 1}$ und $\alpha \cdot (a_n)_{n\geq 1} := (\alpha a_n)_{n\geq 1}$) und $R$ der Endomorphismenring von $V$. Es bezeichnen $\varphi : V \to V$ und $\psi : V \to V$ die Abbildungen

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots) \quad \text{und} \quad \psi(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\varphi$ und $\psi$ sind Elemente von $R$ (d.h. $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen),
b) $\varphi$ besitzt in $R$ ein linksinverses, aber kein rechtsinverses Element,
c) $\psi$ besitzt in $R$ ein rechtsinverses, aber kein linksinverses Element.

**56)** Es sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ quadratfrei (d.h. es gibt keine Primzahl $p$ mit der Eigenschaft $p^2 \mid d$). Beweisen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ein kommutativer Ring mit 1 ist.

**57)** a) Was ist die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}$?
b) Was ist die Einheitengruppe des Rings $M_n(K)$ (wobei $K$ eine Körper bezeichnet)?
c) Finden Sie alle Einheiten von $\mathbb{Z}[i]$, d.h. die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[i]^*$.
d) Zeigen Sie, dass $\pm(1+\sqrt{2})^n \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

**58)** Es sei $R$ ein Ring mit 1 mit der Eigenschaft, dass $0 = 1$. Zeigen Sie, dass $R = \{0\}$.

**59)** Es sei

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \,\middle|\, z, w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{H}$, versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation von Matrizen, einen Schiefkörper, aber keinen Körper bildet.

**60)** Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ überabzählbar unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{H}$ besitzt.

**61)** Es sei

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in 2\mathbb{Z} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $R$ ein Ring ist, der nicht kommutativ ist und kein Einselement besitzt.

**62)** Es sei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe. Beweisen Sie: Setzt man $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in G$, so ist $(G,+,\cdot)$ ein kommutativer Ring.

**63)** Es seien $R_1, \dots, R_n$ Ringe. Beweisen Sie:

a) Definiert man auf $R_1 \times \cdots \times R_n$ eine Addition und eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned} & (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ \text{und} \quad & (a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n), \end{aligned}$$

so wird $R_1 \times \cdots \times R_n$ dadurch zu einem Ring.

b) Sind $R_1, \dots, R_n$ alles Ringe mit 1, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ ein Ring mit 1.

c) Sind $R_1, \dots, R_n$ alle kommutativ, so ist auch $R_1 \times \cdots \times R_n$ kommutativ.

d) Sind $R_1, \dots, R_n$ alles Ringe mit 1, so gilt $(R_1 \times \cdots \times R_n)^* = R_1^* \times \cdots \times R_n^*$.

e) Ist $I_i$ ein Linksideal (bzw. Rechtsideal bzw. Ideal) von $R_i$ für $1 \le i \le n$, so ist $I_1 \times \cdots \times I_n$ ein Linksideal (bzw. Rechtsideal bzw. Ideal) von $R_1 \times \cdots \times R_n$.

**Definition.** Das Zentrum $Z(R)$ eines Rings $R$ ist definiert als

$$Z(R) := \{a \in R \mid ax = xa \text{ für alle } x \in R\}.$$

**64)** a) Es sei $R$ ein Ring. Beweisen Sie, dass $Z(R)$ ein Unterring von $R$ ist.

b) Es seien $R_1, \dots, R_n$ Ringe. Beweisen Sie, dass $Z(R_1 \times \cdots \times R_n) = Z(R_1) \times \cdots \times Z(R_n)$.

**65)** Es sei $K$ ein Körper. Beweisen Sie:

a) $Z\big(M_2(K)\big) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in K \right\}$,

b) $Z\big(M_2(K)\big)$ ist weder Linksideal noch Rechtsideal von $M_2(K)$.

**66)** Es sei $R$ ein Ring und $a \in R$. Beweisen Sie, dass $\{x \in R \mid xa = 0\}$ ein Linksideal und $\{x \in R \mid ax = 0\}$ ein Rechtsideal von $R$ ist.

**67)** Es sei $R$ der Ring aller Polynomfunktionen $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$I := \{p \in R \mid p(x,y) = 0 \text{ wenn } x^2 + y^2 = 1\}$$

(d.h. die Polynomfunktionen, die am Einheitskreis verschwinden) ein Ideal von $R$ ist.

**Definition.** Es sei $R$ ein Ring. Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ mit der Eigenschaft $a^n = 0$ gibt. Die Menge aller nilpotenter Elemente des Rings $R$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Nil}(R)$.

**68)** Es sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring mit 1. Beweisen Sie:

a) Ist $a \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist $a$ ein Nullteiler.
b) Wenn $a, b \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist $a + b \in \mathrm{Nil}(R)$.
c) $\mathrm{Nil}(R)$ ist ein Ideal von $R$.
d) Ist $u \in R^*$ und $a \in \mathrm{Nil}(R)$, so ist $u + a \in R^*$ (*Hinweis.* Geometrische Reihe).

**69)** Es sei $K$ ein Körper und $1 \leq k \leq n$.

a) Es sei $I_k := \{(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } j \neq k\}$, d.h. die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Eintragungen aus $K$, bei denen höchstens in der $k$-ten Spalte Eintragungen $\neq 0$ stehen. Beweisen Sie, dass $I_k$ ein Linksideal von $M_n(K)$ ist.

b) Es sei $J_k := \{(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq k\}$, d.h. die Menge aller $n \times n$-Matrizen mit Eintragungen aus $K$, bei denen höchstens in der $k$-ten Zeile Eintragungen $\neq 0$ stehen. Beweisen Sie, dass $I_k$ ein Rechtsideal von $M_n(K)$ ist.

**70)** Es sei $K$ ein Körper. Beweisen Sie, dass $M_n(K)$ nur die Ideale $\{0\}$ und $M_n(K)$ besitzt. (*Hinweis.* Es bezeichne $E_{ij}$ jene Matrix in $M_n(K)$, die in der $i$-ten Zeile und $j$-ten Spalte die Eintragung 1 besitzt und sonst immer nur 0 als Eintragung. Ist $I \neq \{0\}$ ein Ideal von $M_n(K)$, so gibt es $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in I \setminus \{0\}$. Daher gibt es $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft $a_{k\ell} \neq 0$. Zeigen Sie für $1 \leq t \leq n$, dass $E_{tk} \cdot A \cdot E_{\ell t} = a_{k\ell} E_{tt}$. Folgern Sie daraus $a_{k\ell} E_{tt} \in I$, $a_{k\ell} E_{tt} \cdot a_{k\ell}^{-1} E_{tt} = E_{tt} \in I$ und $I_n = E_{11} + \cdots + E_{nn} \in I$.) Warum folgt aus diesem Beispiel und Satz 70 (iii) für $n \geq 2$ nicht, dass $M_n(K)$ ein Schiefkörper ist?

**71)** Es sei $R$ ein Ring und $X \subseteq R$. Beweisen Sie

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{I} \alpha_i x_i \beta_i + \sum_{j=1}^{J} \gamma_j y_j + \sum_{k=1}^{K} u_k \delta_k + \sum_{\ell=1}^{L} n_\ell v_\ell \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_i, \beta_i \in R \text{ und } x_i \in X \text{ für } 1 \leq i \leq I, \\ \gamma_j \in R \text{ und } y_j \in X \text{ für } 1 \leq j \leq J, \\ \delta_k \in R \text{ und } u_k \in X \text{ für } 1 \leq k \leq K, \\ n_\ell \in \mathbb{Z} \text{ und } v_\ell \in X \text{ für } 1 \leq \ell \leq L \end{array} \right\}.$$