Übungen zu Stochastik für das Lehramt, WS 2017/18

zur Vorlesung von Christoph Baxa
Zusammengestellt von Franz Hofbauer
Modifiziert von Gernot Greschonig und Christoph Baxa

1) Es seien E, F und G Ereignisse, d.h. Teilmengen einer Ergebnismenge Ω. Beschreiben Sie mit Hilfe der Mengen E, F und G und der Verknüpfungen $\cap$, $\cup$ und ^{c}:

a) Mindestens eines der drei Ereignisse E, F und G tritt ein,
b) Keines der drei Ereignisse E, F und G tritt ein,
c) Alle drei Ereignisse E, F und G treten ein,
d) Genau eines der drei Ereignisse E, F und G tritt ein.

2) Für zwei Teilmengen $A, B \subseteq \Omega$ wird ihre symmetrische Differenz $A \triangle B$ definiert als $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Begründen Sie, dass beide Darstellungen von $A \triangle B$ wirklich das selbe Ergebnis liefern. Welcher logischen Verknüpfung der beiden Ereignisse A und B entspricht $A \triangle B$? Geben Sie ein Beispiel für das Würfeln mit einem Würfel an, bei dem $A \cup B$ und $A \triangle B$ zwei verschiedene Ereignisse sind.

3) Geben Sie alle möglichen Anordnungen der Ziffern 1, 2, 3 und 4 an.

4) Geben Sie alle sechsstelligen Zahlen an, die man aus den Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 2 bilden kann.

5) Geben Sie alle geordneten Stichproben vom Umfang 4 mit Zurücklegen aus der Menge $\{a, b\}$ an.

6) Geben Sie alle ungeordneten Stichproben vom Umfang 3 ohne Zurücklegen aus der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ an.

7) Es seien $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ und $B = \{1, 2, \ldots, n\}$. Wie viele Funktionen mit der Definitionsmenge A und der Zielmenge B gibt es?

8) Wie viele Fahnen kann man aus den Farben weiß, rot, gold, grün und blau zusammenstellen, wenn eine Fahne aus drei verschiedenfarbigen Streifen (oben, mitte, unten) besteht? Wie viele mögliche Fahnen gibt es, wenn man nur verlangt, dass nebeneinanderliegende Streifen verschiedenfarbig sind?

9) Bei einer Tanzveranstaltung sind acht Damen und acht Herren anwesend. Wie viele mögliche Tanzpaar gibt es (wenn es um ein einzelnes Tanzpaar geht)? Auf wie viele Arten kann man acht Tanzpaare bilden (die zur selben Zeit tanzen)?

10) Auf wie viele Arten können vier Personen in einem PKW mit (genau) vier Sitzplätzen Platz nehmen a) wenn alle vier einen Führerschein haben bzw. b) wenn nur zwei einen Führerschein haben?

11) Es sollen Folgen, die aus sechs Zeichen bestehen, gebildet werden. Dabei können die Zeichen a, b, c, d, 2, 3, 4, 5, 6 verwendet werden und jedes dieser Zeichen darf höchstens einmal vorkommen.
a) Wie viele solcher Zeichenfolgen gibt es?
b) Wie viele solcher Zeichenfolgen gibt es, wenn an dritter und vierter Stelle Ziffern stehen müssen und an den anderen Stellen Buchstaben?
c) Wie viele solcher Zeichenfolgen gibt es, die an den ersten drei Stellen Ziffern und an den anderen Stellen Buchstaben enthalten, wobei die Ziffern der Größe nach aufsteigend geordnet sein sollen?

12) Die vier Personen A, B, C und D sollen bei einer Veranstaltung sprechen. Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn B nach A sprechen soll? Auf wie viele Arten ist das möglich, wenn B unmittelbar nach A sprechen soll?

13) In einer Urne sind 7 rote, 5 blaue und 4 gelbe (unterscheidbare) Kugeln. Wie viele 8-elementige Teilmengen aus dieser Menge von 16 Kugeln gibt es, die genau 3 rote, 3 blaue und 2 gelbe Kugeln enthalten?

14) Jemand hat beim Lotto 6 aus 45 die Zahlen 3, 9, 26, 37, 39, 43 getippt. Wie viele mögliche Ziehungsergebnisse gibt es, die fünf dieser Zahlen enthalten, aber nicht alle sechs? Wie viele Ziehungsergebnisse gibt es, die vier dieser Zahlen enthalten, aber nicht fünf oder sechs?

15) Wie viele nichtleere Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ gibt es, die gleich viele gerade und ungerade Zahlen enthalten?

16) a) In einer Fußballliga spielen 15 Mannschaften. Wie viele Paarungen von zwei Mannschaften, die gegeneinander spielen, gibt es (wenn man nicht zwischen Heim- und Auswärtsspiel unterscheidet)?
b) In einer Ebene sind 15 Gerade gegeben, von denen keine zwei parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen. Wie viele Schnittpunkte gibt es?

17) In einer amerikanischen Stadt ist das Straßennetz rechtwinkelig angelegt mit Straßen in ost-westlicher und nord-südlicher Richtung. Jemand steht an einer Straßenkreuzung und will zur Straßenkreuzung, die 3 Straßen in nördlicher und 5 Straßen in westlicher Richtung liegt. Auf wie viele Arten ist es möglich, ohne Umweg dorthin zu gelangen?

18) Aus den Zeichen a, b, c, d, 2, 3, 4, 5, 6 sollen Folgen gebildet werden, die aus drei Ziffern und drei Buchstaben bestehen.
a) Wie viele solche Folgen gibt es, wenn jedes dieser Zeichen nur einmal verwendet wird?
b) Wie viele solcher Folgen gibt es, wenn jedes dieser Zeichen beliebig oft verwendet werden darf?

19) Bei einem Kartenspiel werden 20 Spielkarten so auf 4 Spieler verteilt, dass jeder Spieler 5 Karten erhält. Wie viele verschiedene Verteilungen der Karten gibt es?

20) Wie viele Anordnungen der Buchstaben a, e, i, o, u, x, x, x, x, x, x, x gibt es, in denen keine zwei Vokale nebeneinander stehen? *Hinweis.* Unterscheiden Sie die beiden Fälle, dass der letzte Buchstabe ein Vokal ist bzw. dass der letzte Buchstabe kein Vokal ist.

21) Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 3, 3, 3, 5, 5, 8, 8 bilden?

22) Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 3, 5, 5, 8, 8 bilden?

23) Wie viele 7-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 2, 2, 2, 5, 5, 8, 8 bilden, die durch 2 teilbar sind?

24) Wie viele 9-stellige Zahlen lassen sich aus den Ziffern 0, 0, 0, 5, 5, 8, 8, 8, 8 bilden, die durch 2 teilbar sind?

25) In einer Übungsgruppe mit 8 Studierenden werden in einer Übungsstunde 5 Beispiele gerechnet. Wie viele Möglichkeiten hat der Übungsleiter oder die Übungsleiterin die Studierenden aufzurufen,

a) wenn jeder Studierende mehrmals aufgerufen werden kann und man die Reihenfolge des Aufrufens berücksichtigt?
b) wenn jeder Studierende höchstens einmal aufgerufen werden kann und man die Reihenfolge des Aufrufens berücksichtigt?
c) wenn jeder Studierende höchstens einmal aufgerufen werden kann und man die Reihenfolge des Aufrufens nicht berücksichtigt?
d) wenn jeder Studierende mehrmals aufgerufen werden kann und man die Reihenfolge des Aufrufens nicht berücksichtigt?

26) Es sei Ω eine nichtleere, endliche Menge. Geben Sie einen kombinatorischen Beweis dafür an, dass $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$ (wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichnet).

27) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Geben Sie einen kombinatorischen Beweis für die Identität

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

28) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Geben Sie einen kombinatorischen Beweis für die Identität

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Hinweis. Was sagt diese Identität über die Teilmengen einer n-elementigen Menge M aus? Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ bijektiv ist: Es sei $a \in M$ ein beliebiges fix gewähltes Element von M und

$$f(A) = \begin{cases} A \setminus \{a\} & \text{wenn } a \in A, \\ A \cup \{a\} & \text{wenn } a \notin A. \end{cases}$$

29) Es seien $k, n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq k < n$. Leiten Sie die Gleichung $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ aus dem Additionstheorem für Binomialkoeffizienten ab.

30) Wiederholen Sie den Beweis der de Morgan'schen Regeln, d.h. ist I eine nichtleere (Index)Menge, Ω eine (nichtleere) Menge und $A_i \subseteq \Omega$ für alle $i \in I$, so gelten

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

31) Es sei Ω eine nichtleere Menge. Beweisen Sie:
a) $\{\varnothing, \Omega\}$ ist eine σ-Algebra,
b) Ist $A \subseteq \Omega$, so ist $\{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ eine σ-Algebra.

32) Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und $B \subseteq \Omega$, $B \neq \varnothing$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}\}$ ebenfalls eine σ-Algebra (von Teilmengen von B) ist.

33) Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Beweisen Sie, dass dann auch $A \triangle B \in \mathcal{A}$ ist.

34) Es sei $\Omega := \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ und für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\mathbb{P}(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ 1 & \text{falls } A \text{ unendlich ist.} \end{cases}$$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

35) Es sei $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra, $x \in [0, 1]$ sei fest gewählt und für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\mathbb{P}(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A, \\ 1 & \text{falls } x \in A. \end{cases}$$

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum?

36) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Finden Sie eine Formel, die $\mathbb{P}(A \triangle B)$ durch $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B)$ ausdrückt und beweisen Sie sie.

37) Es sei $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{4}$. Für welche Werte von $\mathbb{P}(\{2\})$ ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum? Begründen Sie Ihre Behauptung.

38) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:
a) $\max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$,
b) $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$.

39) Es sei $\Omega := \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$. Ferner sei $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}(\{1, 2\}) = x$, $\mathbb{P}(\{2, 3\}) = y$ und $\mathbb{P}(\{1, 3\}) = z$ für gewisse $x, y, z \in [0, 1]$. Für welche Werte von x, y, z ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum? Begründen Sie Ihre Behauptung.

40) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c).$$

41) Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) sich die Augenzahlen um 1 unterscheiden?

b) die Augenzahlen gleich sind?

c) die Augensumme ≥ 10 ist?

d) die erste Augenzahl kleiner als die zweite ist?

42) Ein Würfel wird viermal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) alle vier Zahlen verschieden sind?

b) die Zahlen 1 und 2 nicht vorkommen?

c) die Zahl 1 genau einmal auftritt?

d) genau zwei verschiedene Zahlen vorkommen?

43) Ein Lehrer bestimmt die Noten folgendermaßen: Er würfelt mit einem Würfel dreimal hintereinander und nimmt das Minimum der Augenzahlen und der Zahl 5 als Note. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Noten?

44) In einer Urne befinden sich 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln hintereinander mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ist genau eine der Kugeln schwarz?

b) wird keine weiße Kugel gezogen?

c) treten drei verschiedene Farben auf?

d) ist die zweite Kugel rot, die andern aber nicht?

45) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Personen

a) mindestens zwei am selben Wochentag (d.h. Montag bis Sonntag) geboren sind?

b) genau zwei am selben Wochentag (d.h. Montag bis Sonntag) geboren sind?

46) Eine Urne enthält n Kugeln, die mit $1, 2, \ldots, n$ nummeriert sind. Wir ziehen mit Zurücklegen aus der Urne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir beim k-ten Ziehen erstmals eine Kugel ziehen, die wir vorher schon einmal gezogen haben?

47) Ein Würfel wird 25 Mal hintereinander geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, viermal 1, sechsmal 2, fünfmal 3, zweimal 4, dreimal 5 und fünfmal 6 zu erhalten?

48) Eine Zahl wird zufällig aus der Menge der ganzen Zahlen von 1 bis 100 ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Zahl

a) durch 4 oder durch 6 teilbar ist? b) durch 9 oder durch 10 teilbar ist?

49) Peter und Paul haben sich für die Stundenwiederholung in Mathematik nicht vorbereitet. Sie wissen, dass der Lehrer zufällig 2 der 20 anwesenden Schülern auswählen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a) sowohl Peter als auch Paul drankommen?

b) Peter, aber nicht Paul drankommt?

c) Paul drankommt?

d) weder Peter noch Paul drankommen?

50) Bei einem Glücksspiel werden drei Ein-Euro-Münzen unter neun umgedrehten Kaffeetassen versteckt, wobei jede Münze unter einer anderen Tasse liegt. Der Spieler wählt drei Tassen und dreht sie um. Er gewinnt die Münzen, die er findet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er keine, eine, zwei oder alle drei Münzen gewinnt?

51) In einer Urne sind 4 weiße, 3 schwarze und 1 rote Kugel. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) ist genau eine der Kugeln weiß?
b) wird keine rote Kugel gezogen?
c) ist höchstens eine Kugel schwarz?
d) treten mehr weiße als schwarze Kugeln auf?

52) Wie groß ist beim Schnapsen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler

a) alle 5 Karten einer Farbe erhält? b) alle 4 Asse erhält?

53) Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten, das von jeder der vier Farben Treff, Pik, Herz und Karo je 13 Karten enthält, wird eine ungeordnete Stichprobe vom Umfang 17 gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Herz, 3 Karo, 7 Treff und 2 Pik zu ziehen?

54) Aus den 5 Mädchen Antonia, Bärbel, Cäcilie, Doris und Elfi soll ein aus drei Mädchen bestehendes Team ausgelost werden.

a) Wie viele verschiedene Teams gibt es?
b) Wie groß ist für jedes Mädchen die Chance, in das Team zu kommen?
c) Bärbel möchte gerne gemeinsam mit Antonia spielen. Wie groß ist ihre Chance dafür?
d) Cäcilie möchte gemeinsam mit Antonia, aber nicht gemeinsam mit Doris spielen. Wie groß ist die Chance dafür?

55) In einer Urne befinden sich 5 rote, 3 blaue und 4 grüne Kugeln. Man zieht daraus eine dreielementige Teilmenge.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Farben zu ziehen?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, drei verschiedene Farben zu ziehen?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedene Farben zu ziehen?

56) Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten werden zufällig fünf Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau drei Herzkarten und zwei Könige sind?

57) Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 90$ wird solange ohne Zurücklegen gezogen, bis die ersten 15 Zahlen aufgetreten sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mehr als 80 Züge benötigt?

58) Es sei $0 \leq t \leq 1$. Zwei Punkte werden zufällig im Intervall $[0, 1]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer $\geq t$ ist?

59) Es sei $t \geq 0$. Zwei Punkte werden zufällig im Intervall $[0,1]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihre Summe $\leq t$ ist?

60) Auf einer Strecke der Länge 1 werden zwei Punkte zufällig gewählt. Dadurch wird diese Strecke in 3 Teile geteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die 3 Teilstrecken Seiten eines Dreiecks?

61) In einer Wand befindet sich ein äußerlich nicht sichtbares Drahtgeflecht aus 4 mm starkem Draht, das Rechtecke mit den Seitenlängen 50 mm und 80 mm (gemessen von Drahtmitte zu Drahtmitte) bildet. An einer zufällig gewählten Stelle wird mit einem 10 mm-Bohrer ein Loch in die Wand gebohrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Drahtgeflecht getroffen?

62) Zwei Punkte a und b werden zufällig im Intervall $[0,4]$ gewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ zwei reelle Nullstellen hat?

62+i) (Zusatzbeispiel für FreundInnen der Zahlentheorie) Es sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl. Aus der Menge der Zahlen $\{1, 2, \ldots, m\}$ wird zufällig eine Zahl k gezogen. Die Eulersche φ-Funktion ist definiert als $\varphi(m) = |\{k \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq k \leq m, \mathrm{ggT}(k,m) = 1\}|$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Zahl k zu m relativ prim ist (d.h. $\mathrm{ggT}(k,m) = 1$) ist daher $\frac{\varphi(m)}{m}$. Verwenden Sie den Additionssatz für beliebig viele Ereignisse, um die folgende Gleichung herzuleiten: Besitzt m die Primfaktorzerlegung $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ (d.h. $p_1, \ldots, p_n$ sind paarweise verschiedene Primzahlen und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ positive ganze Zahlen), so gilt

$$\frac{\varphi(m)}{m} = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Hinweis. Sie können verwenden, dass $\mathrm{ggT}(k,m) > 1 \iff \exists i \in \{1, \ldots, n\} : p_i$ teilt k und dass eine ganze Zahl genau dann durch jede der (paarweise verschiedenen) Primzahlen $q_1, \ldots, q_s$ teilbar ist, wenn sie durch ihr Produkt $q_1 \cdots q_s$ teilbar ist.

63) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathcal{A}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Wir definieren $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1]$ durch $\mathbb{P}_B(A) := P(A \mid B)$. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_B)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

64) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie: Wenn A, B unabhängig sind, dann sind auch A^c, B unabhängig.

65) In einer Urne befinden sich die Buchstaben ANANAS. Es werden nacheinander vier Buchstaben ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei das Wort ANNA zu erhalten?

66) Aus einer Urne mit Buchstaben wird zufällig dreimal hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Man gewinnt, wenn man das Wort ELF zieht. Sind die Gewinnchancen höher, wenn sich in der Urne die Buchstaben EFL befinden oder wenn darin die Buchstaben EEFFLL sind?

67) In einer Urne sind 4 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander alle 6 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die erste schwarze Kugel kann als erste, zweite, ... , fünfte Kugel gezogen werden. Welcher dieser Fälle ist am wahrscheinlichsten?

68) In Urne A sind 3 schwarze und 2 weiße Kugeln. In Urne B sind 2 schwarze und 5 weiße Kugeln. Man zieht aus jeder der beiden Urnen eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dabei mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?

69) Die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser beim Lotto ist $\frac{1}{8145060}$. Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn (d.h. mindestens drei richtige) ist $\frac{194130}{8145060}$. Jemand gibt jede Woche einen Tipp ab. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er/sie in einem Jahr (52 Wochen) mindestens einen Sechser (bzw. mindestens einen Gewinn) erzielt?

70) Jemand möchte 100 Mal Lotto spielen. Sind seine/ihre Chancen mindestens einen Sechser zu gewinnen, größer, wenn er/sie die 100 Tipps in 100 aufeinanderfolgenden Spielrunden abgibt oder wenn er/sie 100 Tipps bei einer Spielrunde abgibt?

71) Jemand gibt bei jeder Lottorunde einen Tipp ab. Wie viele Runden wären erforderlich, um mit einer Wahrscheinlichkeit ≥ 0.95 mindestens einen Sechser zu erzielen?

72) Bei einer schriftlichen Prüfung werden 5 Fragen gestellt, zu denen jeweils 3 Antworten vorgegeben sind. Bei jeder Frage ist genau eine der Antworten richtig. Die Prüfung wird positiv beurteilt, wenn mindestens die Hälfte der Antworten richtig angekreuzt ist. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, die Prüfung positiv zu absolvieren, wenn man ohne nachzudenken einfach irgendetwas ankreuzt.

73) Eine Münze, die beim Werfen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Zahl anzeigt, wird dreimal geworfen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit

a) genau einmal Zahl zu werfen,
b) öfter Wappen als Zahl zu werfen,
c) mindestens einmal Zahl zu werfen,
d) jedes Mal das gleiche Ergebnis zu erhalten.

74) Die sechs Seiten eines Würfels sind mit den Ziffern 122333 beschriftet. Dieser Würfel wird neunmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dreimal 1, viermal 2 und zweimal 3 zu erhalten?

75) Julia und Rupert spielen ein Tennismatch auf drei gewonnene Sätze. Julia gewinnt einen Satz mit Wahrscheinlichkeit 0,6 und Rupert mit Wahrscheinlichkeit 0,4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Julia das Match

a) ohne Satzverlust gewinnt?
b) in vier Sätzen gewinnt?
c) in fünf Sätzen gewinnt?

76) In einer Urne befinden sich 8 weiße und 2 schwarze Kugeln. Anna und Barbara spielen folgendes Spiel: Sie ziehen zufällig ohne Zurücklegen Kugeln aus dieser Urne, und zwar zuerst Anna eine, dann Barbara zwei, dann Anna zwei, dann Barbara zwei und immer so weiter. Wer zuerst eine schwarze Kugel zieht, hat gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Barbara?

77) Anna zieht aus einer Urne mit zwei weißen und einer schwarzen Kugel und Barbara zieht aus einer Urne mit zwei weißen und drei schwarzen Kugeln. Sie ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen, wobei Anna beginnt. Siegerin ist, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna gewinnt?

78) Anna und Barbara ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen aus einer Urne, die die Buchstaben AABBB enthält, wobei Anna beginnt. Siegerin ist, wer zuerst den Anfangsbuchstaben ihres Namens zieht.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anna?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Barbara?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es keine Siegerin?

79) Wie das vorherige Beispiel, nur mit dem Unterschied, dass die Urne diesmal die Buchstaben AAABBBBB enthält.

80) In einer Urne befindet sich eine weiße und eine schwarze Kugel. Es wird so oft gezogen, bis die weiße Kugel gezogen wird. Jedes Mal, wenn eine schwarze Kugel gezogen wird, wird sie in die Urne zurückgelegt und noch eine weitere schwarze Kugel in die Urne gelegt. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man n Züge benötigt, bis die weiße Kugel gezogen wird.

81) Gegeben sind vier Würfel mit den Augenzahlen 004444, 333333, 222266 und 111555. Die Spieler A und B spielen folgendes Spiel: A wählt einen Würfel. Dann wählt B einen der übrigen Würfel. Wer die größere Augenzahl wirft, hat gewonnen. Zeigen Sie, dass B den Würfel immer so wählen kann, dass er/sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnt.

82) Jemand hat beim Lotto 6 aus 45 die Zahlen 3, 9, 26, 37, 39, 43 getippt. Bei der Lottoziehung wird zusätzlich zu den sechs Gewinnzahlen noch eine Zusatzzahl gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass fünf der getippten Zahlen unter den Gewinnzahlen vorkommen und die sechste getippte Zahl die Zusatzzahl ist?

83) Aus einem Kartenspiel mit 20 Spielkarten (wie man es zum Schnapsen verwendet) bekommen Peter und Paul je fünf Karten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält Peter alle vier Asse und Paul alle vier Könige?

84) Der Marktanteil der Firmen A, B und C für ein bestimmtes Gerät ist 30%, 50% bzw. 20%. Die von der Firma A hergestellten Geräte sind mit Wahrscheinlichkeit $0,1$, jene der Firma B mit Wahrscheinlichkeit $0,2$ und jene von C mit Wahrscheinlichkeit $0,15$ fehlerhaft. Das Gerät, das ich gekauft habe, funktioniert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es von A, B bzw. C erzeugt?

85) Von zwei gleich aussehenden Würfeln ist einer fair. Der andere ist gezinkt und zeigt 6 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Man wählt zufällig einen der beiden Würfel und würfelt damit fünfmal. Das Ergebnis ist fünfmal 6. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der ausgewählte Würfel der faire ist?

86) Zur Erkennung einer Krankheit wird ein Test verwendet, der bei 99% der erkrankten Personen diese korrekt anzeigt. Allerdings zeigt der Test bei 0,5% der Personen, die nicht an der Krankheit leiden, diese fälschlich an. Man weiß, dass 1% der Bevölkerung an dieser Krankheit leiden. Bei einer Person zeigt der Test die Krankheit an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie tatsächlich erkrankt?

87) Ein Laden ist durch eine Alarmanlage gesichert, die im Fall eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit $0,99$ Alarm auslöst. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit Wahrscheinlichkeit $0,002$ Fehlalarm ausgelöst. Die Einbruchswahrscheinlichkeit für eine Nacht beträgt $0,0005$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gang, wenn der Alarm ausgelöst wurde?

88) An einem Straßenstück, auf dem 30% der FahrerInnen die erlaubte Höchstgeschwindigkeit überschreiten, wird ein Radarmessgerät installiert. Das Gerät erkennt ein zu schnell fahrendes Auto mit Wahrscheinlichkeit $0,98$. Allerdings wird mit Wahrscheinlichkeit $0,05$ ein nicht zu schnell fahrendes Auto irrtümlich als zu schnell gemessen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einE AutofahrerIn, der/die Strafe wegen Schnellfahrens auf dieser Strecke zahlen muss, dies ungerechterweise tut?

89) Eine Modifikation des Ziegenproblems: Falls der Moderator die Wahl zwischen zwei Türen mit einer Ziege dahinter hat, wählt er mit Wahrscheinlichkeit p (wobei $0 \leq p \leq 1$) die Tür mit der kleineren Nummer. Der Kandidat hat Tür 1 gewählt und der Moderator hat Tür 3 geöffnet (und die Ziege dahinter gezeigt). Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das Auto hinter Tür 2? Welcher Wert ergibt sich insbesondere für $p = 0$ bzw. $p = 1$?

90) In einem mittelalterlichen Kerker schmachten die drei Gefangenen A, B und C. Da wird ihnen mitgeteilt, der König habe beschlossen, zwei von ihnen hinrichten zu lassen, der dritte aber werde freigelassen. Wer der Glückliche ist, wird ihnen aber nicht gesagt. Jeder kann also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ hoffen, dass ihm sein Leben geschenkt wird. A sagt: *Ich werde den Wärter bitten, mir den Namen eines der zum Tode Verurteilten zu nennen – aber nicht meinen eigenen, falls er darunter sein sollte. Ich weiß dann, dass entweder ich überleben werde oder aber der, den er nicht genannt hat. Dann kann ich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf die Freiheit hoffen.* B widerspricht ihm: *Dass entweder ich oder C sterben werden, weißt du ohnehin. Du hast also keine neue Information gewonnen und die Wahrscheinlichkeit bleibt bei $\frac{1}{3}$.* Wer hat recht? (Sie können bei der Lösung die folgenden Annahmen machen: Der Wärter kennt die Antwort und gibt A eine wahre Antwort. Hat er die Wahl zwischen zwei Namen, so wählt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ einen der beiden Namen.)

91) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariable. Beweisen Sie, dass $\max\{X, Y\} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \max\{X(\omega), Y(\omega)\}$ und $\min\{X, Y\} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \min\{X(\omega), Y(\omega)\}$ ebenfalls zwei Zufallsvariable sind.
Hinweis. Verwenden Sie für den Beweis nicht die Definition der Zufallsvariable, sondern die Relationen

$$\max\{X, Y\} = \frac{1}{2}\Big(X + Y + |X - Y|\Big) \quad \text{und} \quad \min\{X, Y\} = \frac{1}{2}\Big(X + Y - |X - Y|\Big)$$

und Satz 23 aus der Vorlesung.

92) Ein gezinkter Würfel (bei dem in der Nähe der Seite mit 1 ein kleines Bleigewicht eingefügt wurde) wird geworfen. Die Zufallsvariable $X : \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \mathbb{R}$ sei die geworfene Zahl. Es gelten $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{10}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{20}$ für $k \in \{2, 3, 4, 5\}$ und $\mathbb{P}(X = 6) = \frac{3}{10}$. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

93) Zwei Würfel werden geworfen. Die Zufallsvariable

$$X : \Omega = \big\{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\} \to \mathbb{R}$$

sei das Maximum der beiden geworfenen Zahlen. Geben Sie die Wertemenge $X(\Omega)$ und die Zahlen $\mathbb{P}(X = k)$ für jeden Wert $k \in X(\Omega)$ an und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

94) Zwei Würfel werden geworfen. Die Zufallsvariable

$$X : \Omega = \big\{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\} \to \mathbb{R}$$

sei der Absolutbetrag der Differenz der beiden geworfenen Zahlen. Geben Sie die Wertemenge $X(\Omega)$ und die Zahlen $\mathbb{P}(X = k)$ für jeden Wert $k \in X(\Omega)$ an und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

95) Die Zufallsvariable $X : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ sie durch $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ gegeben. Überprüfen Sie, dass es sich bei $\big(\mathbb{P}(X = k)\big)_{k\geq 1}$ tatsächlich um einen Wahrscheinlichkeitsvektor handelt und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

96) Ein Punkt wird zufällig im Einheitsquadrat $[0, 1]^2$ gewählt. Die Zufallsvariable

$$X : \Omega = [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$$

sei der kürzeste Abstand des gewählten Punktes vom Rand des Quadrats. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

97) Zwei Punkte werden zufällig im Einheitsintervall $[0, 1]$ gewählt. Die Zufallsvariable

$$X : \Omega = [0, 1]^2 \to \mathbb{R}$$

sei der Abstand der beiden Punkte. Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion F von X.

98) Die Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ t/2 & \text{für } 0 \leq t \leq 2, \\ 1 & \text{für } t > 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2})$ und b) $\mathbb{P}(1 \leq X < 2)$.

99) Es sei $p \in [0, 1]$. Die Zufallsvariable X besitze die Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < -1, \\ 1-p & \text{für } -1 \leq t < 0, \\ 1-p+\frac{1}{2}tp & \text{für } 0 \leq t \leq 2, \\ 1 & \text{für } t > 2. \end{cases}$$

Bestimmen Sie a) $\mathbb{P}(X = -1)$, b) $\mathbb{P}(X = 0)$ und c) $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

100) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ der Zufallsvariablen X aus den Beispielen 92 bis 95 (soferne X einen endlichen Erwartungswert besitzt).

101) Nach Bezahlung von vier Euro darf man einmal würfeln und erhält die geworfene Augenzahl in Euro. Was kann als mittlerer Gewinn (bzw. Verlust) pro Spiel erwartet werden?

102) In einer Urne sind drei rote, drei blaue und drei grüne Kugeln. Daraus werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es sei X die Anzahl der auf den gezogenen Kugeln auftretenden Farben. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$.

103) Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6

a) genau dreimal geworfen wird?
b) genau achtmal geworfen wird?

104) Eine Fluggesellschaft weiß aus Erfahrung, dass bei 4% aller verkauften Tickets die Fluggäste nicht zum Flug erscheinen. Sie verkauft daher bei einem Flug mit 73 verfügbaren Plätzen 75 Tickets. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Überbuchung gut geht?

105) Die beiden gleich starken Spieler A und B spielen gegeneinander. Ist es wahrscheinlicher, dass A mindestens 6 von 8 Spielen gewinnt oder dass A mindestens 9 von 12 Spielen gewinnt?

106) Eine Prüfung besteht aus zehn Fragen. Zu jeder Frage sind drei mögliche Antworten angegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie viele richtig angekreuzte Antworten muss man für ein positives Prüfungsergebnis verlangen, wenn die Wahrscheinlichkeit, nach rein zufälligem Ankreuzen positiv beurteilt zu werden, höchstens 0,005 sein soll?

107) Die Spieler A und B spielen das folgende Spiel: A hat eine Schachtel mit zwei weißen und einer schwarzen Kugel und B hat eine Schachtel mit einer weißen und einer schwarzen Kugel. Sie ziehen abwechselnd mit Zurücklegen aus der eigenen Schachtel, wobei A beginnt. Sieger ist, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt?

108) Ein Spieler trifft ein Ziel mit Wahrscheinlichkeit 0,3. Wie viele Versuche sind im Durchschnitt erforderlich, bis er den ersten Treffer erzielt?

109) Die Anzahl der Personen, die ein Geschäft betreten, sei Poisson-verteilt, wobei im Schnitt pro Stunde zehn Personen das Geschäft betreten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 15:00 und 15:30 höchstens vier Personen das Geschäft betreten?

110) Die Anzahl der Unfälle, die sich in einem Unternehmen ereignen, sei Poisson-verteilt, wobei sich im Schnitt alle zehn Arbeitstage ein Unfall ereignet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich innerhalb einer Woche (mit fünf Arbeitstagen) mehr als ein Unfall ereignet? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in zwei aufeinander folgenden Wochen kein Unfall ereignet?

111) Die Zufallsvariable X sei $P(\lambda)$-verteilt. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(X = k)$ für $k = [\lambda]$ maximal wird. (Dabei bezeichnet $[\lambda]$ die größte ganze Zahl $\leq \lambda$, d.h. $[\lambda]$ ist die eindeutig bestimmte ganze Zahl mit der Eigenschaft $[\lambda] \leq \lambda < [\lambda] + 1$.)
Hinweis. In diesem Beispiel ist $\lambda > 0$ fest gewählt und $k \in \mathbb{N}$ variiert. Betrachten Sie für die Lösung den Quotienten $\mathbb{P}(X = k)/\mathbb{P}(X = k - 1)$.

112) Die Zufallsvariable X sei $P(\lambda)$-verteilt und $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei fest gewählt. Für welchen Wert von $\lambda > 0$ nimmt $\mathbb{P}(X = k)$ sein Maximum an?
Hinweis. In diesem Beispiel ist $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fest gewählt und $\lambda > 0$ variiert.

113) Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Man würfelt so lange, bis zum n-ten Mal 6 geworfen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das beim k-ten Wurf passiert?

Bemerkung. Bei Zufallsvariablen, die eine Verteilung wie im vorangegangenen Beispiel besitzen, spricht man von *Pascal-Verteilung* oder *negativer Binomialverteilung.*

114) Berechnen Sie die Varianz für Bsp. 101).

115) Auf einem Maturaball werden 300 Lose verkauft. Davon sind 150 Nieten, bei 100 Losen erhält man einen Preis im Wert von EUR 3,–, bei 40 Losen erhält man einen Preis im Wert von EUR 6,–, bei 9 Losen erhält man einen Preis im Wert von EUR 10,– und der Haupttreffer ist ein Preis im Wert von EUR 90,–. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz des Preises, den man beim Kauf eines Loses erhält.

116) Die diskrete Zufallsvariable X habe die Werte $X(\Omega) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ und die möglichen Werte seien alle gleich wahrscheinlich, d.h. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ für $1 \leq k \leq n$. Beweisen Sie

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Bemerkung. Bei Zufallsvariablen, die eine Verteilung wie im vorangegangenen Beispiel besitzen, spricht man von *diskreter Gleichverteilung.*

117) Die Nutzungsdauer einer bestimmten Art von Waschmaschinen sei eine stetige Zufallsvariable X mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \cos \frac{x}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 4\pi, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei x in Jahren gemessen wird.

a) Überprüfen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Dichtefunktion handelt.
b) Wieviel Prozent der Waschmaschinen werden länger als 10 Jahre genutzt?
c) Wieviel Prozent der Waschmaschinen werden kürzer als 6 Monaten genutzt?
d) Ergänzen Sie: 75% aller Waschmaschinen werden länger als ... genutzt.

118) Berechnen Sie die Dichtefunktionen für Bsp. 96), Bsp. 97) und Bsp. 98).

119) Die Disteln auf einer Wiese seien Poisson-verteilt, wobei auf einem Quadratmeter im Schnitt μ Disteln wachsen. D.h. die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Stück Wiese mit einer Fläche von x Quadratmetern k Disteln wachsen, ist $\frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x}$. Mitten auf der Wiese steht ein Baum (dessen Stamm wir der Einfachheit halber als punktförmig annehmen).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Kreis mit einem Radius von 5m um den Baum höchstens zwei Disteln wachsen?
b) Sei X die Entfernung vom Baum zur nächsten Distel. Bestimmen Sie die Dichtefunktion von X.

120) Die Lebensdauer eines Gerätes sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

wobei x in Jahren gemssen wird. Die Herstellerfirma stellt das Gerät zum Stückpreis von EUR 2.000,– her, verkauft es um n Euro und zahlt den Kaufpreis zurück, wenn das Gerät innerhalb des ersten halben Jahres versagt. Wie ist n zu wählen, damit der Erwartungswert des Gewinnes EUR 500,– beträgt?

121) Die Lebensdauer X einer bestimmten Art von Glühbirnen (gemessen in Stunden) sei $E(\lambda)$-verteilt. Tests haben ergeben, dass diese Art Glühbirnen 1000 Stunden mit Wahrscheinlichkeit 0,9 überlebt. Bestimmen Sie λ.

122) a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine der Glühbirnen aus dem vorangegangenen Beispiel 2000 Stunden überlebt?
b) Wie viele Stunden überlebt eine derartige Glühbirne mit Wahrscheinlichkeit 0,95?

123) Eine Maschine stellt Drahtstifte her, deren Länge normalverteilt ist mit $\mu = 4\,\text{cm}$ und $\sigma = 0,1\,\text{cm}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge eines Drahtstifts um mehr als $0,15\,\text{cm}$ von μ abweicht?

124) Beim Abfüllen von $0,5\,\ell$ Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen als normalverteilt mit $\mu = 500\,\text{cm}^3$ und $\sigma = 5\,\text{cm}^3$ angenommen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Milchflasche weniger als $490\,\text{cm}^3$ enthält?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Abfüllen einer Milchflasche die Milch überläuft, wenn das Volumen der Milchflaschen $508\,\text{cm}^3$ beträgt?

125) Das Körpergewicht der Schülerinnen und Schüler eines Jahrganges sei jeweils normalverteilt, und zwar das der Schülerinnen mit $\mu = 60\,\text{kg}$ und $\sigma = 4\,\text{kg}$ und das der Schüler $\mu = 65\,\text{kg}$ und $\sigma = 5\,\text{kg}$. Welches Körpergewicht gilt als normal, wenn man die obersten 10% als übergewichtig und die untersten 10% als untergewichtig bezeichnet?

126) Die Arbeitszeit für die Montage einer Antenne sei normalverteilt mit $\mu = 115\,\text{min}$ und $\sigma = 20\,\text{min}$. Welche Arbeitszeit muss im Kostenvoranschlag angegeben werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass diese Arbeitszeit überschritten wird, höchstens 0,25 sein soll?

127) Das Gewicht von Hühnereiern sei normalverteilt mit $\mu = 66,4\,\text{g}$ und $\sigma = 9,5\,\text{g}$. Die Eier sollen in drei Gewichtsklassen eingeteilt werden. Welche beiden Werte muss man als Grenzen zwischen den Gewichtsklassen festlegen, wenn jede Gewichtsklasse gleich viele Eier enthalten soll?

128) Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel sei normalverteilt mit $\mu = 4\,\text{cm}$ und $\sigma = 0,1\,\text{cm}$. Welche Abweichung vom Mittelwert μ muss man tolerieren, wenn die Maschine nicht mehr als 4% Ausschuss produzieren soll?

129) Eine Verpackungsmaschine füllt Mehl in Packungen mit der Nennmasse von 1000 g ab. Dabei ist die Masse in den Packungen normalverteilt mit $\sigma = 2\,\mathrm{g}$. Der Verpacker muss aufgrund gesetzlicher Vorschriften garantieren, dass in höchstens 5% aller Packungen die auf der Packung angegebene Nennmasse um mehr als 3 g unterschritten wird. Auf welche mittlere Abfüllmenge μ muss er die Maschine einstellen, um diese Vorschrift zu erfüllen?

130) Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse von 1000 g so befüllen, dass bei höchstens 5% aller Packungen der Inhalt mehr als 1010 g beträgt. Welche Standardabweichung σ darf die Abfüllanlage höchstens haben, wenn man die Masse in den Packungen als normalverteilt annimmt und die Abfüllmaschine so justiert ist, dass die mittlere Füllmasse gleich der Sollmasse ist?

131) Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse von 3 kg befüllen. Die Packungsinhalte kann man als normalverteilt annehmen, wobei die Genauigkeit der verwendeten Abfüllanlage mit $\sigma = 0,03\,\mathrm{kg}$ angegeben wird. Der Produzent will, dass bei höchstens 5% aller Packungen der Inhalt mehr als $3,06\,\mathrm{kg}$ beträgt. Welche Mindestfüllmenge t ist auf das Etikett zu drucken und auf welchen Mittelwert μ muss der Produzent die Abfüllanlage einstellen, wenn höchstens 2% der Packungen die garantierte Mindestfüllmenge t unterschreiten dürfen?

132) Ein Produzent will Packungen mit der Sollmasse von 1000 g so befüllen, dass bei höchstens 10% aller Packungen der Inhalt mehr als 1020 g beträgt. Aufgrund gesetzlicher Vorschriften dürfen höchstens 5% der Packungen weniger als 980 g enthalten. Wie genau muss die Abfüllanlage arbeiten, das heißt wie groß darf die Standardabweichung σ der normalverteilten Packungsinhalte höchstens sein, damit beides möglich ist?

133) Ein Würfel wird 720 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) 115 bis 125 Mal Sechs geworfen wird?
- b) öfter als 140 Mal Sechs geworfen wird?

134) Eine Firma produziert Glühbirnen mit einem Ausschussanteil von 1,5%.
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Packung von 5000 Glühbirnen mehr als 70 defekte Glühbirnen sind?
- b) Welche Maximalanzahl von defekten Glühbirnen kann in einer Packung von 5000 Glühbirnen mit 95%iger Sicherheit garantiert werden?

135) Eine Prüfung besteht aus 36 Fragen. Zu jeder Frage sind zwei Antworten angegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie viele richtig beantwortete Fragen muss man für ein positives Prüfungsergebnis verlangen, damit die Wahrscheinlichkeit, die Prüfung durch rein zufälliges Ankreuzen zu bestehen, höchstens 0,02 ist?

136) Eine Lotterie legt 20 000 Lose auf, von denen 4 000 gewinnen. Wie viele Lose muss man kaufen, damit man mit Wahrscheinlichkeit $0,998$ mindestens 3 Gewinne erzielt?