Übungen zu Lineare Algebra und Analysis in mehreren Variablen für das Lehramt WS 2021/22

Christoph Baxa

1) Beweisen Sie, dass $(\mathbb{R}^n, +)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei $+$ die komponentenweise Addition bezeichnet.

2) Ist $(\mathbb{R}^3, +, \times)$ ein Ring? Dabei bezeichne $+$ die komponentenweise Addition und $\times$ das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn es sich dabei nicht um einen Ring handeln sollte, beweisen Sie die erfüllten Voraussetzungen und geben Sie Gegenbeispiele für die nicht erfüllten Voraussetzungen an.

3) Berechnen Sie alle Produkte der folgenden drei Matrizen A, B und C (mit reellen Eintragungen), die man bilden kann:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

4) Überprüfen Sie durch direktes Nachrechnen, dass $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ gilt (wobei die Matrizen A und B reelle Eintragungen haben sollen):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Es sei K ein Körper. Beweisen Sie: Sind $A, B \in M_{m,n}(K)$ und $C \in M_{n,\ell}(K)$, so gilt

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

6) Es sei K ein Körper und $a, b, c, d \in K$. Zeigen Sie: Wenn $ad - bc \neq 0$, ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$$

invertierbar. Geben Sie A^{-1} an.

7) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie: Wenn $A \in M_n(K)$ die Eigenschaft besitzt, dass ein $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existiert, sodass $A^{r+1} = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet), dann ist $I_n - A$ invertierbar und es gilt $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \cdots + A^r$.

8) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{M}, \cdot)$ eine Gruppe ist. Dabei bezeichne $\cdot$ die Multiplikation von Matrizen und

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ist diese Gruppe abelsch?

9) Beweisen Sie, dass $(\mathcal{C}, \cdot)$ eine Gruppe bildet, wobei

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

sei und $\cdot$ die Matrizenmultiplikation bezeichne. Ist diese Gruppe abelsch?

10) Es sei K ein Körper und

$$\mathcal{D}_n = \left\{ A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K) \,\middle|\, a_{ii} \neq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n \text{ und } a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j \right\},$$

d.h. die Menge aller $n \times n$ – Diagonalmatrizen mit Eintragungen aus K, in deren Diagonale nur Eintragungen $\neq 0$ stehen. Beweisen Sie, dass $(\mathcal{D}_n, \cdot)$ eine Gruppe ist, wobei $\cdot$ die Matrizenmultiplikation bezeichnet. Für welche n ist diese Gruppe abelsch?

Definition: Es sei K ein Körper und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(K)$. Als Spur von A bezeichnet man

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \in K.$$

11) Es sei K ein Körper und $A, B \in M_n(K)$. Beweisen Sie:

a) $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$,
b) Wenn B invertierbar ist, gilt $\operatorname{Spur}(BAB^{-1}) = \operatorname{Spur} A$.

12) Zeigen Sie: Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ ist nicht kommutativ wenn $n \geq 2$. *Hinweis.* Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, dass für jeden Körper K funktioniert, finden Sie zunächst eines für $n = 2$, in dem nur die Körperelemente 0 und 1 auftreten. Erweitern Sie dieses geeignet, um ein Gegenbeispiel zu finden, dass für $n > 2$ verwendet werden kann.

Definition: Es sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M_n(K)$ heißt symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch) wenn $A^T = A$ (bzw. $A^T = -A$) gilt.

13) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie:

a) Wenn $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(K)$ schiefsymmetrisch ist gilt $a_{ii} = 0$ für $1 \leq i \leq n$,
b) Ist $A \in M_n(K)$ sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, so ist $A = \mathbf{0}$ (wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix bezeichnet),
c) Summen, Differenzen und skalare Vielfache von symmetrischen (bzw. schiefsymmetrischen) Matrizen sind wieder symmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch).

14) Es sei K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: Jede Matrix $A \in M_n(K)$ lässt sich auf eindeutige Weise als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix schreiben.

15) Es sei K ein Körper, $\alpha \in K$ und $A, B \in M_n(K)$. Zeigen Sie

$$(\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B).$$

16) Zeigen Sie: Wenn K ein Körper ist und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dann ist K^n ein K-Vektorraum.

17) Beweisen Sie: Die Menge $\mathcal{F} = \left\{(a_n)_{n\geq 1} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$ aller reeller Folgen ist mit den Verknüpfungen

$$(a_n)_{n\geq 1} + (b_n)_{n\geq 1} := (a_n + b_n)_{n\geq 1} \quad \text{und} \quad \alpha \cdot (a_n)_{n\geq 1} := (\alpha a_n)_{n\geq 1}$$

ein reeller Vektorraum.

18) Es sei $I (\subseteq \mathbb{R})$ ein Intervall und $\mathbb{R}^I = \{f \mid f : I \to \mathbb{R}\}$ die Menge aller Funktionen $I \to \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^I$ ein reeller Vektorraum ist, wobei Summe $f + g$ und skalares Vielfache $\alpha \cdot f$ (mit $f, g \in \mathbb{R}^I$ und $\alpha \in \mathbb{R}$) durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ bzw. } (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ für } x \in I$$

festgelegt sind.

19) Es sei $V = (0, +\infty)$, d.h. V ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Für $v, w \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ seien $v \oplus w$ und $\alpha \odot v$ durch $v \oplus w := v \cdot w$ und $\alpha \odot v := v^\alpha$ definiert. Beweisen Sie, dass V ein reeller Vektorraum ist.

20) Es sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und K ein Körper. Beweisen Sie, dass die Menge K^M aller Abbildungen $f : M \to K$ mit den Verknüpfungen

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ und } (\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x) \text{ für } x \in M \text{ und } \alpha \in K$$

ein K-Vektorraum ist. Welche der bisherigen Beispiele von Vektorräumen kann man als Spezialfall dieses Vektorraums auffassen?

21) Welches der folgenden Beispiele ist ein Vektorraum (jeweils mit komponentenweiser Addition und Multiplikation mit Skalaren)?

a) $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{Z}$ c) $\mathbb{Z}^n$ über $\mathbb{Z}$ d) $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{C}$

22) Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \alpha_1 x + \alpha_2 y = \beta_1 x + \beta_2 y = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ ist.

23) Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \right\}$$

ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ ist.

24) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ (mit $n \geq 2$)?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geq 0 \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 x_2 = 0 \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{Q} \right\}$

25) Welche der folgenden Mengen sind Teilräume des Vektorraums $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$?

a) $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid p(1) = 0\}$ b) $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid p(1) = 1\}$ c) $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : p(\alpha) = 0\}$

26) Beweisen Sie, dass sowohl die symmetrischen als auch die schiefsymmetrische Matrizen einen Teilraum des reellen Vektorraums $M_n(\mathbb{R})$ bilden und bestimmen Sie den Schnitt dieser beiden Teilräume.

27) Ist $\mathbb{Q}^n$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$?

28) Es sei V ein K-Vektorraum und U, W zwei Teilräume von V. Beweisen Sie, dass $U \cup W$ genau dann ein Teilraum von V ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

29) Finden Sie den Schnitt der folgenden beiden Teilräume U und W des $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x - y + z = 0 \right\}, \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x + y - z = 0 \right\}.$$

30) Es seien $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und

$$V = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \alpha_0 f''(x) + \alpha_1 f'(x) + \alpha_2 f(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Beweisen Sie, dass V ein Teilraum des reellen Vektorraums $C^\infty(\mathbb{R})$ ist.

31) Es sei V ein K-Vektorraum und U und W Teilräume von V. Beweisen Sie, dass

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

ebenfalls ein Teilraum von V ist.

32) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V. Beweisen Sie, dass dann auch $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von V ist.

33) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ und $\{v, w\}$ alles Basen von V sind, wobei

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

34) Es sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Welche der folgenden Teilmengen von V sind linear unabhängig bzw. Basen von V?

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

35) Es bezeichne V den reellen Vektorraum $P_3(\mathbb{R})$. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig bzw. Basen von V?

a) $\{p_1, p_2, p_3\}$ wobei $p_1(x) = x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$ und $p_3(x) = x^3 - x^2$,

b) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ wobei $p_1(x) = 2x^3 + 1$, $p_2(x) = x^2 + x + 1$, $p_3(x) = x^3 - x$ und $p_4(x) = x^2 + 1$.

36) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{R}$ an (und beweisen Sie, dass es wirklich eine Basis ist). Was ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$?

37) Es sei V der reelle Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ und p_0 bzw. p_1 sollen die Funktionen $p_0(x) = 1$ bzw. $p_1(x) = x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) bezeichnen. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\sin, \cos, p_0, p_1\}$ von Funktionen linear unabhängig ist.

38) Es sei V der reelle Vektorraum $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist symmetrisch}\}$. Geben Sie eine Basis für V an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} V$.

39) Es sei V der reelle Vektorraum $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist schiefsymmetrisch}\}$. Geben Sie eine Basis für V an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} V$.

40) Es sei $V = \{x + \sqrt{2} \cdot y \,|\, x, y \in \mathbb{Q}\}$. Beweisen Sie, dass V (mit der üblichen Addition und Multiplikation reeller Zahlen) ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist. Geben Sie dafür eine Basis an und bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} V$.

41) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

42) Beweisen Sie:

a) Der Zyklus $\zeta = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k) \in S_n$ hat Signum $\operatorname{sgn} \zeta = (-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

b) Hat die Permutation $\sigma \in S_n$ die Darstellung

$$\sigma = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1,r_1}) \circ (a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2,r_2}) \circ\ \cdots\ \circ (a_{s1}\ a_{s2}\ \ldots\ a_{s,r_s})$$

als Verknüpfung elementfremder Zyklen, so gilt $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^{r_1 + \cdots + r_s - s}$.

43) Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$):

a) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig)

44) Berechnen Sie die folgenden Determinanten (mit Eintragungen aus $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$):

a) $\begin{vmatrix} 1+i & 2 & -i \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2i & 3 & 1-3i \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

45) Leiten Sie die Formel für die Determinante einer 2×2 – Matrix sowohl mit Hilfe der Leibniz-Formel als auch mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes her.

46) Beweisen Sie die Regel von Sarrus mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

47) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie (mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$ beliebig):

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\beta & \alpha & -\delta & \gamma \\ -\gamma & \delta & \alpha & -\beta \\ -\delta & -\gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2$$

48) Berechnen Sie die folgenden Determinante (mit Eintragungen aus einem Körper K):

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

49) Zeigen Sie (mit Eintragungen aus $\mathbb{R}$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 2^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & (n-2)^2 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 & (n-1)^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = n!$$

50) Berechnen Sie die sogenannte Vandermondesche Determinante: Für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ (wobei K einen Körper bezeichnet).

Hinweis. Die rechte Seite ist das Produkt über alle Paare $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, die $i < j$ erfüllen. Verwenden Sie Induktion nach n. Bringen Sie für den Induktionsschritt die erste Zeile auf die Gestalt $(1, 0, \ldots, 0)$: Multiplizieren Sie dazu die $(n-1)$-te Spalte mit x_1 und subtrahieren Sie sie von der n-ten. Dann multiplizieren Sie die $(n-2)$-te Spalte mit x_1 und subtrahieren Sie sie von der $(n-1)$-ten, usw.

51) Beweisen Sie, dass die *Special Linear Group* $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid \det A = 1\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

52) a) Es sei $A \in M_n(K)$ und $\alpha \in K$. Zeigen Sie $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch. Beweisen Sie: Wenn n ungerade ist, gilt $\det A = 0$.
c) Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertierbar und $A^{-1} = A^T$. Beweisen Sie $\det A \in \{+1, -1\}$.

53) Berechnen Sie die Inversen der folgenden Matrizen (soferne sie existieren):

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

54) Lösen Sie mit Hilfe von Satz 57 nochmals Bsp. 6.

55) Für welche Werte von $x \in \mathbb{C}$ sind die folgenden Matrizen invertierbar? Geben Sie die Inversen an (soferne sie existieren).

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} -1 & x & 0 \\ x & 1 & x \\ 0 & x & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{pmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$$

56) Die Matrizen $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Lösung $X \in M_3(\mathbb{R})$ der Gleichung $AX + B = 0$ (soferne eine solche existiert).

57) Es sei $n \geq 2$ und $A, B \in M_n(K)$ seien invertierbar. Beweisen Sie:

a) $(A \cdot B)^\# = B^\# \cdot A^\#$ b) $\det(A^\#) = (\det A)^{n-1}$

c) $(A^\#)^\# = (\det A)^{n-2} A$ d) $(A^{-1})^\# = (A^\#)^{-1}$

58) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Wenn φ linear ist, geben Sie eine Darstellung mittels Multiplikation mit einer Matrix an.

$$\text{a)}\ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v \mapsto -v \qquad \text{b)}\ \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, v \mapsto v + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)}\ \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{d)}\ \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

59) Es sei K ein Körper und $B \in M_n(K)$ ist fest gewählt. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\varphi : M_n(K) \to M_n(K)$, $A \mapsto A \cdot B - B \cdot A$ linear ist.

60) Es seien $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \mathbb{R}^4$. Überprüfen Sie, dass

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von V ist und bestimmen Sie die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$, die durch die folgenden Bilder der Elemente von B gegeben ist:

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

61) Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein (offenes) Intervall. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$D : C^\infty(I) \to C^\infty(I),\ D(f) = f' = \tfrac{df}{dx}$$

(d.h. D bildet jede Funktion auf ihre Ableitung ab) linear ist und bestimmen Sie $\operatorname{Kern} D$ und $\operatorname{Bild} D$. *Hinweis.* Bei diesem Beispiel können und müssen Sie Ihr Wissen aus der Vorlesung *Analysis in einer Variable für das Lehramt* verwenden.

62) Es seien V und W zwei K-Vektorräume, $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung und $w \in W$. Zeigen Sie: Wenn es ein $v_0 \in V$ mit der Eigenschaft $\varphi(v_0) = w$ gibt, so ist die Menge der Lösungen $v \in V$ der Gleichung $\varphi(v) = w$ durch $\{v_0 + u \mid u \in \operatorname{Kern}\varphi\}$ gegeben. Welche bekannte Tatsache aus der Analysis erhält man, wenn man (wie im vorangegangenen Beispiel) $V = W = C^\infty(I)$ und $\varphi(f) = D(f) = f'$ setzt?

63) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang von φ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Kern}\varphi$.

64) Ist die folgende lineare Abbildung injektiv bzw. surjektiv?

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

65) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \varphi \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

$\mathbb{R}$-linear aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. (D.h. φ ist linear, wenn man $\mathbb{C}^2$ als reellen Vektorraum auffasst, aber nicht linear, wenn man $\mathbb{C}^2$ als komplexen Vektorraum auffasst.)

66) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

a) $$\begin{aligned} x_1-2x_2-x_3&=-1\\ 2x_1+3x_2+x_3&=0\\ x_1+4x_2+x_3&=2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3&=-1\\ 6x_1+x_2+x_3&=-4\\ 2x_1-3x_2-x_3&=0\\ -x_1-7x_2-2x_3&=7\\ x_1-x_2&=1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-x_4+x_5&=1\\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_5&=2\\ 3x_1-2x_2+2x_3+x_4+x_5&=1 \end{aligned}$$

67) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{C}$ mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens:

a) $$\begin{aligned} ix_1+(2+i)x_2&=1\\ x_1+(2-i)x_2&=1+i \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1+ix_2+(1+i)x_3&=1\\ x_1-2x_2+ix_3&=0\\ -ix_1+x_2-(2-i)x_3&=1 \end{aligned}$$

68) Für welchen Wert von $\alpha \in \mathbb{R}$ bilden die Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems (über $\mathbb{R}$) einen zweidimensionalen Teilraum?

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3+x_4&=0\\ -x_1+x_2+2x_3-x_4&=0\\ 3x_1+13x_2+\alpha x_3+3x_4&=0 \end{aligned}$$

69) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Cramerschen Regel (soferne das möglich ist):

a) $$\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3&=0\\ x_1+x_2+x_3&=0\\ x_2-x_3&=1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1-2x_2+3x_3-x_4&=-2\\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4&=12\\ 3x_2-x_3-x_4&=-3\\ 3x_1+2x_2+4x_3+5x_4&=10 \end{aligned}$$

70) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme aus Beispiel 67) nochmals mit Hilfe der Cramerschen Regel (soferne das möglich ist).

71) Beweisen Sie, dass durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 10x_2y_2 \qquad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

auf $\mathbb{R}^2$ ein inneres Produkt definiert ist.

72) Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V. Beweisen Sie, dass durch $(v, w) := \langle [v]_B, [w]_B \rangle$ (mit $v, w \in V$) ein inneres Produkt auf V definiert ist, wobei $\langle ., . \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnen soll.

73) Es sei $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ und für $A, B \in V$ sei $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^T \cdot B)$ definiert. Beweisen Sie, dass $\langle .,. \rangle$ ein inneres Produkt auf V ist.

74) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Beweisen Sie die *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \forall\, v, w \in V.$$

75) Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle .,. \rangle$ und $\|.\|$ die davon induzierte Norm. Beweisen Sie, dass

$$\langle v, w\rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2\Big) \quad \forall\, v, w \in V.$$

76) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind:

a) $(-\infty, 2] \cup (3, +\infty)$ b) $(0, 2] \cup [1, 3)$ c) $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ d) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

77) Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind:

a) $\big\{(1 + \frac{1}{n})^n \;\big|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\}$ b) $\{e\} \cup \big\{(1 + \frac{1}{n})^n \;\big|\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\}$ c) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \big[n, n + \frac{1}{2}\big]$

78) Schreiben Sie $\{0\} \cup \big\{\frac{1}{m} \;\big|\; m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\big\} \subseteq \mathbb{R}$ als Durchschnitt (unendlich vieler) abgeschlossener Mengen.

79) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ und $r > 0$, sowie $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in B_r(\mathbf{x})$. Zeigen Sie, dass die "offene Kugel mit Löchern" $B_r(\mathbf{x}) \setminus \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ offen ist.

80) Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^k$. Zeigen Sie: M ist genau dann beschränkt, wenn es ein $N > 0$ gibt, sodass $M \subseteq [-N, N]^k$.

81) Welche der Mengen aus den Beispielen 76 bzw. 77 sind kompakt?

82) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

gegeben. Geben Sie offene (bzw. abgeschlossene) Mengen an, deren Urbilder unter f bzw. g nicht offen (bzw. abgeschlossen) sind.

83) Zeigen Sie, dass die Menge A abgeschlossen ist, indem sie sie als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung darstellen.

a) $A = \overline{B_r(\mathbf{x})}$ (mit $r > 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$) b) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

84) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktionen

a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$,

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$,

c) $f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z)$,

d) $f(x, y, z) = \frac{xe^y}{z}$ (mit $z \neq 0$).

85) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x$ und $\partial f/\partial y$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ existieren und berechnen Sie sie.

86) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$. Zeigen Sie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

87) Die Zustandsgleichung eines idealen Gases ist durch $PV = cT$ gegeben. Dabei bezeichnen P den Druck, V das Volumen und T die Temperatur und c ist eine positive Konstante. Zeigen Sie

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

(und nicht 1, wie man durch "Kürzen" erhalten würde).

88) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\mathbf{a} \in D$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ mögen in $\mathbf{a}$ einen Gradienten besitzen. Beweisen Sie: Dann besitzen auch $f + g$, αf (mit $\alpha \in \mathbb{R}$), fg und f/g (soferne $g(\mathbf{a}) \neq 0$) in $\mathbf{a}$ einen Gradienten und es gelten:

a) $\operatorname{grad}(f + g)(\mathbf{a}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) + \operatorname{grad} g(\mathbf{a})$,

b) $\operatorname{grad}(\alpha f)(\mathbf{a}) = \alpha \operatorname{grad} f(\mathbf{a})$,

c) $\operatorname{grad}(fg)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a}) \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) \operatorname{grad} g(\mathbf{a})$,

d) $\operatorname{grad}(\frac{f}{g})(\mathbf{a}) = \frac{1}{g(\mathbf{a})^2} \big(g(\mathbf{a}) \operatorname{grad} f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \operatorname{grad} g(\mathbf{a})\big)$.

89) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ eine symmetrische $n \times n$ – Matrix mit reellen Eintragungen (d.h. es gelte $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i, j \leq n$). Beweisen Sie, dass für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$ die Gleichung $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = 2A\mathbf{x}$ gilt.

90) Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f im Punkt $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{u}$, soferne sie existiert:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\mathbf{x} = (1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$,

b) $f(x,y) = \sin(xy)$, $\mathbf{x} = (1,0)$, $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$,

c) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $\mathbf{x} = (1,1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$.

91) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Zeigen Sie: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0$, und zwar auch für $x = y = 0$. Daraus folgt $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist also $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$.

92) Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionen auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar sind und berechnen Sie ihre Ableitung $f'(x,y)$ bzw. $f'(x,y,z)$:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 y, e^{-xy})$,

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (e^{xy}, z \sin x, y \cos x)$,

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^3 y^2, xy, y^4)$.

93) Es sei $f(x,y) = (x^2+1, y^2)$ und $g(u,v) = (u+v, uv^2)$. Berechnen Sie die Ableitung $(g \circ f)'(1,1)$ mit Hilfe der Kettenregel und direkt.

94) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn sie $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$ für alle $t > 0$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ erfüllt. Zeigen Sie den folgenden *Satz von Euler:* Ist f homogen vom Grad α und differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\, x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\, x_k = \alpha f(\mathbf{x}).$$

Hinweis. Es sei $g(t) = f(t\mathbf{x})$ für festes $\mathbf{x}$ und $t > 0$. Berechnen Sie $g'(1)$ auf zwei Arten.

95) Bestimmen Sie, ob die folgenden quadratischen Formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit sind:

a) $q(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$,

b) $q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2 + x_3^2$,

c) $q(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2 + 6x_2x_3 - 9x_3^2$.

96) Bestimmen Sie, ob die folgenden quadratischen Formen $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv bzw. negativ definit bzw. semidefinit oder indefinit sind:

a) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$,
b) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,
c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

97) Berechnen Sie nochmals die Richtungsableitungen aus Bsp. 90), diesmal mit Hilfe von Satz 122 aus der Vorlesung, d.h. mittels $\operatorname{grad} f$.

98) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktion:

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1 \quad (\text{mit } x, y \in \mathbb{R})$$

99) Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktion:

$$f(x, y) = 1/y - 1/x - 4x + y \quad (\text{mit } x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

100) Gegeben seien die n Punkte $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^k$. Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(\mathbf{x}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|^2$$

bei $\mathbf{x} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i$ ein Minimum annimmt.

101) Beweisen Sie: Wenn $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, dann gilt $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \le n \sum_{i=1}^n x_i^2$, wobei Gleichheit nur für $x_1 = \cdots = x_n$ gilt. Hinweis: Cauchy – Schwarzsche Ungleichung.

102) Gegeben seien n Punktepaare $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, die man durch Messungen erhalten hat und für die von einer Theorie eine lineare Beziehung $y = kx + d$ voraussagt wird. Da die Messungen fehlerbehaftet sind, sucht man eine *Ausgleichsgerade*, d.h. Werte für k und d, durch die der Fehler möglichst klein wird. Zu diesem Zweck betrachtet man die Funktion $f(k, d) := \sum_{i=1}^n (kx_i + d - y_i)^2$ und untersucht, für welche Werte von k und d sie ihr Minimum annimmt. (Diese Vorgangsweise wird *Methode der kleinsten Quadrate* genannt.) Beweisen Sie, dass man (unter einer vernünftigen Zusatzannahme – nämlich welcher?) auf diese Weise folgende Werte erhält:

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \qquad d = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

103) Berechnen Sie $\int_Q f(x,y)\,d(x,y)$ für

a) $Q = [0,2] \times [3,4],\ f(x,y) = 2x + 3y$

b) $Q = [0,1]^2,\ f(x,y) = xy + y^2$

104) Berechnen Sie $\int_Q f(x,y)\,d(x,y)$ für

a) $Q = [1,2]^2,\ f(x,y) = e^{x+y}$

b) $Q = [0, \frac{\pi}{2}]^2,\ f(x,y) = \sin(x+y)$

105) Berechnen Sie $\int_Q f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ für

a) $Q = [1,2] \times [2,3] \times [0,2],\ f(x,y,z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$

b) $Q = [0,1]^3,\ f(x,y,z) = \frac{x^2 z^3}{1+y^2}$

106) Berechnen Sie das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x + y$ und dem Rechteck $[0,1] \times [0,2]$ (in der xy-Ebene).

107) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der oben vom Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und unten vom Quadrat $[0,1] \times [0,1]$ (in der xy-Ebene) begrenzt wird.

108) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und oberhalb des Quadrats $[0,2] \times [0,2]$ (in der xy-Ebene) liegt.

109) Berechnen Sie

$$\int_A x^2 y\,d(x,y),$$

wobei A die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Nullpunkt sei.

110) Berechnen Sie

$$\int_A (x + y^2)\,d(x,y),$$

wobei A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ sei.