Proseminar Analysis 1, SS 2006

Beispiele 1 – 14 sind in erster Linie als Übung zur Einführungsvorlesung gedacht.

Summen- und Produktzeichen

1. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

   (a) $\sum_{k=0}^{2} 2^{k^2}$

   (b) $\sum_{k=1}^{n} e^{k+1}$

   (c) $\sum_{k=-2}^{3} b_{k+1}$

   (d) $\prod_{j=2}^{5} k^j$

   (e) $\prod_{k=2}^{5} k^j$

   (f) $\prod_{j=2}^{5} k^2$

   (g) $\sum_{j=2}^{4} \prod_{k=0}^{2} (jk-1)$

   (h) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \binom{j}{k}$

2. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

   (a) $3+6+9+12+15+18$

   (b) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$

   (c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$

   (d) $e^2+2e^6+4e^{10}+8e^{14}+16e^{18}+32e^{22}+64e^{26}$

   (e) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}$

   (f) $a_1+3a_2+5a_3+2a_1^2+6a_2^2+10a_3^2+4a_1^3+12a_2^3+20a_3^3+8a_1^4+24a_2^4+40a_3^4$

3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

   (a) $$\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=3}^{7} a_{j+2}$$

   (b) $$\sum_{i=1}^{5} d_{i+3} = \sum_{j=2}^{7} d_{j+2}$$

   (c) $$\sum_{t\in\{9,16,25,36,49\}} m_t^j = \sum_{p=2}^{6} m^i_{(p+1)^2}$$

   (d) $$\sum_{k=0}^{n} x^{2k+1} = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{2n+1}\Big((-1)^j-1\Big)x^j$$

   (e) $$a^{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \prod_{j=0}^{n} a^{b_{n-j}}$$

(f) $\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(g) $(\log 3) \sum_{j=0}^{n} a_j = \log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i}$

(h) $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_m}$

(h) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

Vollständige Induktion

4. Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$, $n \geq 1$

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$

   (c) $4^n \geq n^4$. Für welche n gilt dies?

5. Die Anzahl der Punkte, in denen sich n in einer Ebene gelegene Geraden schneiden können, beträgt höchstens $(n-1)n/2$.

6. Beweisen Sie: eine Pizza lässt sich durch n geradlinige Schnitte, die von Rand zu Rand verlaufen, in höchstens $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ Stücke zerlegen.

7. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie, dass

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \geq 1.$$

Mengen, Relationen

8. Gegeben $X = \{1,2,3,4\}, Y = \{2,4,6,8\}, Z = \{1,3,5,7\}$. Bestimmen Sie:
   (a) $(X \backslash Y) \cup Z$
   (b) $(X \cup Z) \backslash Y$
   (c) $(X \cup Y) \backslash (Y \cup Z)$
   (d) $X \cup (Y \backslash Z)$
   (e) $(Y \cup X) \backslash (X \cap Z)$

9. Beweisen Sie
   (a) eines der Distributivgesetze und
   (b) eines der De Morgan-Gesetze

   aus Theorem 4.1.12. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.6 (wie im Beweis des Distributivgesetzes im Skriptum).

10. Seien A, B und C Mengen. Zeigen Sie:
    (a) $B \subseteq A \;\Rightarrow B \cup A = A$ und $B \cap A = B$
    (b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
    (c) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
    (d) $(B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

11. Welche der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“ und „transitiv“ haben die folgenden Relationen R auf $\mathbb{N}$?
    (a) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; a$ ist Primteiler von b
    (b) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; |a| = |b|$
    (c) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; (a$ teilt $b)$ oder $(b$ teilt $a)$
    (d) $a\ R\ b \;:\Leftrightarrow\; a = 5^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$

12. Sei X die Menge aller Menschen, x, $y \in X$. Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen?
    (a) x steht zu y in Relation, falls x und y die gleiche Sprache sprechen.
    (b) x steht zu y in Relation, falls x älter oder genauso alt wie y ist.
    (c) x steht zu y in Relation, falls x und y sich gegenseitig kennen.

13. (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

$$x \equiv y \;:\Leftrightarrow x - y \text{ gerade.}$$

Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

(b) Ersetzen Sie in (a) „gerade" durch „ungerade". Handelt es sich nach wie vor um eine Äquivalenzrelation?

(c) Finden Sie weitere Beispiele für Äquivalenzrelationen.

(d) Bei einer Versuchsreihe werden 2 Messergebnisse als gleich betrachtet, wenn sie sich um weniger als $10^{-22}m$ unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

14. *Rechnen mit Restklassen*

(a) Stellen Sie fest, ob die angegebenen Zahlen in der selben Restklasse modulo m liegen:

(i) 2, 12, $m = 2$
(ii) 8, 302, $m = 3$
(iii) 2, 12, $m = 6$
(iv) -111, -29, $m = 7$
(v) -1, -18, $m = 5$
(vi) -59, -91, $m = 8$

(b) Berechnen Sie (a) die kleinste natürliche Zahl x und (b) die größte negative ganze Zahl x für die gilt:

(i) $x \equiv 25 \mod 7$
(ii) $x \equiv (25 + 39) \mod 7$
(iii) $x \equiv (25 \cdot 30) \mod 5$
(iv) $x \equiv 25^2 \mod 7$

(c) Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

(i) $\bar{2} + \bar{3}$
(ii) $\bar{1} - \bar{2}$
(iii) $\bar{2} - \bar{3}$
(iv) $\bar{2} \cdot \bar{2}$
(v) $\bar{2} \cdot \bar{3}$
(vi) $\bar{2} \cdot \bar{4}$