Gewöhnliche Differentialgleichungen und Modellierung
Aufgaben Proseminar Winter Semester 23/24

- Woche 2: **Teschl Problem 1.3, 1.6, 1.7.**

  Aufgabe 1 *Ich stehe zwei Meter von der Mauer meines Hauses, und auf der Fensterbank im ersten Stockwerk, 2.5m hoch, steht eine Pflanze. Ich halte einen Wasserschlauch 1m hoch in der Hand und versuche die Pflanze zu besprühen. Die Anfangsgeschwindigkeit des Wassers beträgt* $10m/s$*. In welchem Winkel muss ich den Schlauch richten, damit das Wasser auf der Pflanze landet?*

  I am standing 2 meter away from the wall of my house. On the window sill of the second floor window (2.5 m high) stands a flower. I have a waterhose in my hand (about 1 m high), and I try to spray the flower. The initial velocity of the water is $10m/s$*. At which angle should I point the hose to water the plant?*

  Teschl Problem 1.9.

- Woche 3: **Teschl Problem 1.13, 1.15, 1.17.**

  Aufgabe 2 *Finden Sie die allgemeine Lösung für die Differentialgleichung*

  $$\dot{x} = x^2 + \frac{x}{\tan t}$$

  Hinweis: Eine der standard trigoniometrische Funktionen ist eine partikuliere Lösung.

  Teschl Problem 1.22.

- Woche 4: **Teschl Problem 1.23, 1.25.**

  Aufgabe 3 *Geben Sie die allgemeine Lösung der periodisch angetriebenen harmonischen Oszillators mit Reibung:*

  $$\ddot{x} + r\dot{x} + \omega^2 = B\cos\Omega t.$$

  Kann Resonanz auftreten?

  Teschl Problem 3.17, 3.19.

- Woche 5: **Teschl Problem 1.31, 2.3, 2.6, 2.7.**

  Aufgabe 4 *In einem U-formigen Rohr ist Wasser (insgesamt* $95cm$ *durch das ganze Rohr, Dichte* $\rho_{Wasser} = 1kg/m^3$*) und Öl (*$5cm$ *oberhalb der linken Seite, Dichte* $\rho_{Öl} = 0.8kg/m^3$*). Vom Ruhezustand wird die Flüssigkeit links* $2cm$ *heruntergedrückt und dann losgelassen.*

  Wie sieht der Ruhezustand aus? Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie. (Reibung darf vernachlässigt werden.)

- Woche 6: **Teschl Problem 2.9, 2.11, 2.12, 2.13.**

  Aufgabe 5 *Finden und lösen sie die ersten zwei Variationsgleichungen des Anfangswertproblems:*
  $$\begin{cases} \dot{x} = 2t(x+1) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

- Woche 7: **Teschl Problem 2.17, 2.23, 2.25.**

  Aufgabe 6 *Physisch stimmt es tatsächlig, dass der Luftwiderstand eine quadraitsche Funktion fer Geschwindigkeit is. Die Bewegungsgleichung eines im Schwerkraftsfeld fallendes Objektes ist also*
  $$\dot{v} = -\varepsilon|v|v - g, \qquad v \in \mathbb{R}, g = 9.8m/s^2$$
  mit (i) Anfangswert $v(0) = 0$, (ii) Anfangswert $v(0) = -1m/s$. Lösen Sie dieses Störungsproblem bis auf $O(\varepsilon^3)$.

  Teschl Problem 3.10

- Woche 8: **Teschl Problem 3.18, 3.20**

  Aufgabe 7 *Lösen Sie die Differentialgleichung*
  $$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)\cos(\omega t)$$
  mit Hilfe von Variation von Konstanten. Verwenden Sie $F(t) := \int_0^t f(s)\cos^2(\omega s)\,ds$ als Notation.

  Aufgabe 8 *Verwenden Sie die Kirchhofgesetze um die folgende Sachen auszurechnen:*

  (a) Der Ersatzwiderstand von zwei (i) in Serie geschalteter und (ii) parallel geschalteter Widerstände;

  (b) Die Ersatzkapazität von zwei (i) in Serie geschalteter und (ii) parallel geschalteter Kondensatoren;

  (c) Die Ersatzinduktivität von zwei (i) in Serie geschalteter und (ii) parallel geschalteter Spulen.

- Woche 9: **Teschl Problem 3.26, 3.27, 3.28**

  Aufgabe 9 *Finden Sie fundamentale Matrix Lösungen für*
  $$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{t-1} & \frac{t}{t-1} \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}.$$
  Hinweis: Versuchen Sie Lösungsvektoren die einfache Polynome oder Exponentialfunktionen sind.

- Woche 10

  Teschl Problem 3.32, 3.33, 3.34, 3.38

  Aufgabe 10 *Die Leistung P einer elektrischen Küchenmixers ist eine Funktion der Dichte ρ des Teigs, der Viskosität μ des Teigs, des Diameters D des Geräts und die Winkelgeschwindigkeits n des Geräts ist.*

  1. *Schreiben Sie die physischen Dimensionen aller Variablen auf. (Für Viskosität müssen Sie vielleicht ein Physikbuch nachschauen – "dimension viscosity" googlen geht auch).*
  2. *Verwenden Sie Buckenhams Π-Theorem um zu zeigen, dass P eine Funktion von nur der Reynolds Konstante $Re = \frac{\rho n D^2}{\mu}$ und einer Gerätskonstante $N = \frac{P}{\rho n^3 D^6}$ ist. Hinweis: Sie brauchen eine geschickte Wahl für die primären Größen.*

- Woche 11: **Teschl Problem 7.2**

  Aufgabe 11 *Eine Differentialgleichung auf $\mathbb{R}^{2n}$ heißt eine Hamiltonsche Differentialgleichung wenn es eine differentierbare* Hamiltonsche Funktion *$H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ gibt, so dass die Gleichung (geschrieben in Variablen $q, p \in \mathbb{R}^n$) die folgende Form hat:*

  $$\begin{cases} \dot{q} &= \nabla_p H \\ \dot{p} &= -\nabla_q H \end{cases} \qquad \textit{wobei } \nabla_q, \nabla_p \textit{ für die Gradienten nach } q, p \textit{stehen.}$$

  1. *Zeigen Sie, dass die Lie-Ableitung von H gleich Null ist. Ist damit H eine Lyapunov Funktion?*
  2. *Finden Sie Hamiltonsche Funktionen für den harmonischen Oszillator und für die Pendelgleichung. Sind alle stationären Punkte hier Zentren?*

  Teschl Problem 7.3, 7.6, 7.7

- Woche 12: **Teschl Problem 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10, 5.16, 5.19**

- Woche 13: **Teschl Problem 6.7, 7.12 (nur für Differentialgleichungen in $\mathbb{R}^2$, denn sonst stimmt es nicht.)**

  Aufgabe 12 *Gegeben ist das Anfangswertproblem*

  $$\begin{cases} \dot{u} = \sin^2 u, \\ u(0) = u_0 \in (0, \pi). \end{cases}$$

  (a) *Zeigen Sie dass die Lösungen existieren für alle Zeit, d.h. alle $t \in \mathbb{R}$. Sind die Lösungen eindeutig?*

  (b) *Zeigen Sie dass für jede Lösung $u(t)$, auch $u(t) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Lösungen sind. Skizzieren Sie das Phasenportrait.*

(c) Für $u_0 \in (0, \pi/2)$, lösen Sie das AWP auf einer kleinen Umgebung von $t = 0$, mit Hilfe der Koordinatentransformation $x = \tan u$. Was passiert wenn $t = 1/\tan u_0$?

Aufgabe 13 *Gegeben ist die Differentialgleichung*

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + x = \cos^2 \Omega t \qquad \varepsilon \geq 0.$$

(a) Finden Sie die vollständige Lösung.

(b) Tritt Resonanz auf? (Für welche Parameterwerte und was ist dann die vollständige Lösung?)