Beispiel A: $(X_j)_{j=1}^{n}$ unabhängig, $X_j \in \{0,1\}$

Bernoulli-verteilt, Erfolgschance $= p$

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \simeq \mathrm{Binom}(n,p) \qquad \mathbb{E}(Y) = np$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y = k) \overset{\text{nach Berechnung}}{=} \frac{k}{n}$$

Also $X_1 \mid Y = k$ is Bernoulli verteilt mit Para. $\frac{k}{n}$

Beispiel B $Y \simeq \mathrm{Pois}(\lambda)$ ist Anzahl Tippfehler

$X \simeq \mathrm{Binom}(Y, p)$ ist Anzahl gefund. Tippfehler

$$\mathbb{P}(X = k \land Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \, \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \qquad 0 \leq k \leq n$$

$Z = Y - X$ ist Anzahl nicht-gefund. Tippfehler

$$\mathbb{P}(X = k, Z = m) \overset{\text{nach Berechnung}}{=} \frac{e^{-\lambda p}}{k!} (\lambda p)^k \times \frac{e^{-\lambda(1-p)}}{m!} [\lambda(1-p)]^m$$

also $X \simeq \mathrm{Pois}(\lambda p)$ und $Z \simeq \mathrm{Pois}(\lambda(1-p))$ sind unab.

Beispiel A: $(X_j)_{j=1}^n$ unabhängig, $X_j \in \{0,1\}$

Bernoulli-verteilt, Erfolgschance $= p$

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \simeq \mathrm{Binom}(n,p) \qquad \mathbb{E}(Y) = np$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1 \mid Y = k) \overset{\text{nach Berechnung}}{=} \frac{k}{n}$$

Also $X_1 \mid Y = k$ is Bernoulli verteilt mit Para. $\frac{k}{n}$

$$\mathbb{E}(X_1 \mid Y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \frac{y}{n} \mathbb{1}_{\{Y=y\}} = \frac{1}{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}} y \, \mathbb{1}_{\{Y=y\}} = \frac{1}{n} Y \quad \text{ist ZV!}$$

$$\mathbb{E}(X_1) \overset{\text{Turm}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1 \mid Y)) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y) = \frac{np}{n} = p$$

Beispiel B: $Y \simeq \mathrm{Pois}(\lambda)$ ist Anzahl Tippfehler

$X \simeq \mathrm{Binom}(Y, p)$ ist Anzahl gefund. Tippfehler

$$\mathbb{P}(X = k \wedge Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \qquad 0 \le k \le n$$

$Z = Y - X$ ist Anzahl nicht-gefund. Tippfehler

$$\mathbb{P}(X = k, Z = m) \overset{\text{nach Berechnung}}{=} \frac{e^{-\lambda p}}{k!} (\lambda p)^k \times \frac{e^{-\lambda(1-p)}}{m!} [\lambda(1-p)]^m$$

also $X \simeq \mathrm{Pois}(\lambda p)$ und $Z \simeq \mathrm{Pois}(\lambda(1-p))$ sind unab.

$\mathbb{E}(X \mid Y = n) = np$, also $\mathbb{E}(X \mid Y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}} y p \, \mathbb{1}_{\{Y=y\}} = pY$ ist ZV

$$\mathbb{E}(X) \overset{\text{Turm}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y)) = \mathbb{E}(pY) = p\lambda$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(X + Z \mid X) = X + \mathbb{E}(Z \mid X)$$

$$\overset{\text{unab.}}{=} X + \mathbb{E}(Z) = X + \lambda(1-p) \quad \text{ist ZV}$$

$$\mathbb{E}(Y) \overset{\text{Turm}}{=} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) = \mathbb{E}(X + \lambda(1-p)) = \lambda p + \lambda(1-p) = \lambda$$