Übungen zu „Grundbegriffe der Topologie“ im WS 2020/21 (Günther Hörmann)

[Die ersten zwei Aufgaben werden in der Übungsstunde nur zum Teil im Detail behandelt. Sie dienen vor allem zur Wiederholung oder zum Einprägen allgemeiner Eigenschaften von Bildern und Urbildern unter Abbildungen, die im Laufe der VO regelmäßig ohne weitere Kommentare verwendet werden.]
Für die folgenden beiden Aufgaben sei jeweils $f\colon X \to Y$ eine Abbildung zwischen beliebigen Mengen X und Y.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Es sei I eine Menge und $A_i \subseteq X$ sowie $B_i \subseteq Y$ für jedes $i \in I$. Zeige zumindest eine der vier Relationen:

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i) \qquad f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i) \text{ [Gleichheit, falls } f \text{ injektiv]}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Seien $A, C \subseteq X$ und $B, D \subseteq Y$. Zeige zumindest eine der folgenden Relationen:

$$f^{-1}(B \setminus D) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(D), \quad f(A \setminus C) \supseteq f(A) \setminus f(C) \text{ [Gleichheit, falls } f \text{ injektiv]},$$

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \text{ [Gleichheit, falls } f \text{ injektiv]}, \quad f(f^{-1}(B)) \subseteq B \text{ [Gleichheit, falls } f \text{ surjektiv]}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Wir betrachten die drei Metriken

$$d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \; d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \;\text{ und }\; d_\infty(x,y) = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j|$$

auf $\mathbb{R}^n$. Skizziere für den Fall $n = 2$ jeweils die Einheitskugel um 0 bezüglich d_1, d_2 und d_∞. Begründe, warum Konvergenz einer Folge gegen einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ bzgl. einer der drei Metriken genau dann stattfindet, wenn dies auch bzgl. jeder der beiden anderen Metriken zutrifft. (Bemerkung bzw. aus der Analysis ist vielleicht bekannt: Jede dieser drei Metriken stammt von einer Norm und auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.)

$\boxed{\mathbf{4}}$ Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A ist abgeschlossen.

(ii) Falls $x \in M$ die Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

besitzt, dann gilt $x \in A$.

(iii) Ist $x \in M$ und (x_n) eine Folge in A [d.h. $x_n \in A \ \forall n$] mit $x_n \to x$, dann gilt $x \in A$.

Für die folgenden beiden Aufgaben sei $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik ausgestattet:

$\boxed{\textbf{5}}$ (a) Ist ein unendlicher Durchschnitt von offenen Intervallen offen?

(b) Ist die unendliche Vereinigung disjunkter abgeschlossener Intervalle abgeschlossen?

$\boxed{\textbf{6}}$ Zeige: $W \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann offen, wenn W (höchstens) abzählbare Vereinigung disjunkter offener Intervalle ist.

(Ein Hinweis für einen möglichen Beweis der Notwendigkeit: Studiere die Relation auf W, die definiert ist durch $x \sim y$, falls es ein offenes Intervall I mit $\{x, y\} \subseteq I \subseteq W$ gibt; zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist und betrachte die entsprechende Klasseneinteilung.)

Für die folgenden beiden Aufgaben sei (M, d) ein metrischer Raum. Für einen Punkt $y \in M$ und eine Teilmenge $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$ setzen wir $d(y, A) := \inf\{d(y, z) \mid z \in A\}$.

$\boxed{\textbf{7}}$ Zeige: $\overline{A} = \{y \in M \mid d(y, A) = 0\}$.

$\boxed{\textbf{8}}$ Durch $f(x) := d(x, A)$ für jedes $x \in M$ wird eine stetige Abbildung $M \to \mathbb{R}$ definiert.

$\boxed{\textbf{9}}$ Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass durch $h(x, y) := \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ $(x, y \in M)$ eine weitere Metrik h auf M definiert wird, die den Konvergenzbegriff für Folgen nicht ändert, d.h. eine Folge in M ist genau dann bzgl. h konvergent gegen $x \in M$, wenn sie es bzgl. d ist. Bemerkung: Die Metrik h ist beschränkt, weil $h(x, y) \leq 1$ für alle $x, y \in M$ gilt.

$\boxed{\textbf{10}}$ Es sei d eine beschränkte Metrik auf der Menge M, d.h. $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik und es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, $C > 0$ mit $d(x, y) \leq C$ für alle $x, y \in M$ (vgl. Aufgabe $\boxed{9}$). Es bezeichne $\mathcal{F}(M)$ die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von M. Zeige, dass durch

$$\rho(A, B) := \max(\sup\{d(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{d(b, A) \mid b \in B\})$$

eine Metrik ρ auf $\mathcal{F}(M)$ definiert wird, nämlich die sogenannte Hausdorffmetrik.

$\boxed{\textbf{11}}$ Es sei X eine Menge und $A \subseteq X$.

(a) Zeige, dass durch $\tau := \{Y \in \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq Y\} \cup \{\emptyset\}$ eine Topologie auf X definiert wird. Wie sieht τ in den Spezialfällen $A = \emptyset$ und $A = X$ aus?

(b) Beschreibe den Abschluss $\overline{E}$ und das Innere E° bzgl. τ für eine beliebige Teilmenge $E \subseteq X$ je nach Lage von E in Bezug auf A.

$\boxed{\textbf{12}}$ Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Zeige, dass für Teilmengen $A, B \subseteq X$ die folgenden Eigenschaften bzgl. des Abschlusses gelten:

(i) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(ii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,

(iii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(iv) A ist abgeschlossen $\;\Leftrightarrow\; \overline{A} = A$. (Insbesondere gilt $\overline{\emptyset} = \emptyset$ und $\overline{X} = X$.)

$\boxed{\textbf{13}}$ Wir wissen aus der VO, dass die Menge $K_\varepsilon(x) = \{y \in M \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$ in jedem metrischen Raum (M,d) für beliebiges $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ abgeschlossen ist und stets $\overline{U_\varepsilon(x)} \subseteq K_\varepsilon(x)$ gilt. Zeige durch Studium des folgenden Beispiels, dass im Allgemeinen nicht die Gleichheit $\overline{U_\varepsilon(x)} = K_\varepsilon(x)$ gilt: Betrachte $M := S^1 \cup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}$ mit der Einschränkung der euklidischen Metrik und darin die entsprechenden Kugeln vom Radius 1.

$\boxed{\textbf{14}}$ (Die Sorgenfrey-Gerade) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\mathcal{B}(x) := \{[x, z[\mid z > x\}.$$

(a) Zeige, dass $\mathcal{B}(x)$ die Eigenschaften (UB1)-(UB3) einer Umgebungsbasis erfüllt und somit eine Topologie τ_S auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

(b) Sei I ein nichtleeres beschränktes Intervall, also $]a, b[\subseteq I \subseteq [a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige: I ist offen bzgl. $\tau_S \iff b \notin I$.

(c) Welche der τ_S-offenen Intervalle aus (b) sind auch zusätzlich τ_S-abgeschlossen?

$\boxed{\textbf{15}}$ (Niemytzki-Raum oder Moore-Ebene) Wir definieren auf $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ eine Topologie τ durch Vorgabe von Umgebungsbasen $\mathcal{B}(p)$ für jedes $p \in \Gamma$ wie folgt:

Für $p = (x,y)$ mit $y > 0$ sei

$$\mathcal{B}(p) := \{U_\varepsilon(p) \mid 0 < \varepsilon \leq y\},$$

wobei $U_\varepsilon(p)$ die euklidischen ε-Umgebungen bezeichnet.

Für p auf der x-Achse, d.h. $p = (x, 0)$, sei

$$\mathcal{B}(p) := \{A_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0\},$$

wobei $A_\varepsilon((x,0)) := U_\varepsilon((x,\varepsilon)) \cup \{(x,0)\}$ ist (d.h. der Punkt p zusammen mit der oberhalb gelegenen offenen ε-Kreisscheibe tangential an die x-Achse im Punkt p).

(a) Zeige an Hand von Skizzen, dass für jedes $p \in \Gamma$ das System $\mathcal{B}(p)$ die Eigenschaften (UB1)-(UB3) einer Umgebungsbasis erfüllt.

(b) Bestimme die τ-Abschlüsse der Teilmengen $A = \mathbb{Q} \times \{1\}$ und $B = \mathbb{Q} \times \{0\}$ von Γ.

$\boxed{\textbf{16}}$ Zeige, dass für eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X gilt

$$\overline{A} = A \cup \{x \in X \mid x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}.$$

$\boxed{\textbf{17}}$ Seien τ_1 und τ_2 Topologien auf der Menge X und für jedes $x \in X$ seien $\mathcal{B}^1(x)$ bzw. $\mathcal{B}^2(x)$ Umgebungsbasen bei x bzgl. τ_1 bzw. τ_2. Zeige:

$$\tau_1 \text{ ist gröber als } \tau_2 \iff \forall x \in X\ \forall B^1 \in \mathcal{B}^1(x)\ \exists B^2 \in \mathcal{B}^2(x)\colon B^2 \subseteq B^1.$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ (a) Zeige, dass das System aller offenen Rechtecke $\mathcal{B} := \{\,]a,b[\times]c,d[\mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ eine Basis für die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeige, dass das System der halb-offenen Intervalle $\mathcal{B} := \{[a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ eine Basis für die Topologie der Sorgenfrey-Geraden aus Aufgabe $\boxed{14}$ ist.

(c) Zeige, dass $\mathcal{B}' := \{[p,q[\mid p,q \in \mathbb{Q}, p < q\}$ keine Basis für die Topologie der Sorgenfrey-Geraden sein kann.

$\boxed{\mathbf{19}}$ Es sei (M,d) ein metrischer Raum, τ_d die von der Metrik induzierte Topologie auf M und $A \subseteq M$. Dann stimmt die Spurtopologie von τ_d auf A mit jener Topologie überein, die von der Einschränkung der Metrik auf $A \times A$ als metrische Topologie auf A erzeugt wird.

$\boxed{\mathbf{20}}$ Wir betrachten den Niemytzki-Raum (Γ, τ) aus Aufgabe $\boxed{15}$. Beschreibe jeweils die Spurtopologie von τ auf der Teilmenge

(a) $A := \{(0,y) \mid y > 0\} = \{0\} \times]0,\infty[\subseteq \Gamma$,

(b) $B := \{(x,y) \mid y > 0\} = \mathbb{R} \times]0,\infty[\subseteq \Gamma$,

(c) $C := \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \Gamma$.

$\boxed{\mathbf{21}}$ Wir versehen $Z := [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der lexikographischen Ordnung: $(x,y) \leq (x',y') \;:\Leftrightarrow$ $x < x'$ oder ($x = x'$ und $y \leq y'$). Beschreibe typische Umgebungen von verschiedenen Punkten $(x,y) \in Z$ bzgl. der Ordnungstopologie auf Z, speziell auch für $(0,0), (1,1), (x,0)$ und $(x,1)$.

$\boxed{\mathbf{22}}$ (a) Sei Y ein topologischer Raum und X eine nichtleere Menge. Welche Abbildungen $X \to Y$ sind stetig, wenn auf X die diskrete Topologie betrachtet wird?

(b) Sei $\sigma \neq \{\emptyset, Y\}$ eine nichttriviale Topologie auf Y und $\tau = \{\emptyset, X\}$ die chaotische Topologie auf X. Wir fragen nach notwendigen Bedingungen an stetige Abbildungen $f\colon (X,\tau) \to (Y,\sigma)$. Kann f surjektiv sein? Wie muss die (Spur der) σ-Topologie auf $f(X)$ aussehen? Finde einfache Beispiele für f, die jedenfalls stetig sind.

(c) Sei X eine Menge und seien τ_1, τ_2 zwei Topologien auf X. Setze die Stetigkeit der identischen Abbildung auf X in Beziehung zur Vergleichbarkeit der beiden Topologien.

$\boxed{\mathbf{23}}$ Es sei (M,d) ein metrischer Raum und h die aus d wie in Aufgabe $\boxed{9}$ konstruierte beschränkte Metrik auf M. Zeige, dass die von d und h auf M induzierten Topologien homöomorph sind, genauer, dass $\mathrm{id}_M\colon (M,\tau_d) \to (M,\tau_h)$, $x \mapsto x$, ein Homömorphismus ist.

$\boxed{\mathbf{24}}$ Es seien X und Y topologische Räume und $f\colon X \to Y$ eine bijektive Abbildung. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein Homöomorphismus,

(ii) für $A \subseteq X$ gilt: $f(A)$ ist offen in $Y \iff A$ ist offen in X,

(iii) für $B \subseteq X$ gilt: $f(B)$ ist abgeschlossen in $Y \iff B$ ist abgeschlossen in X.

$\boxed{\mathbf{25}}$ Es sei $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ die offene Vollkugel mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^n$. Zeige: $B^n \cong \mathbb{R}^n$ vermöge der Abbildung $F\colon B^n \to \mathbb{R}^n$, gegeben durch

$$F(x) := \tan\left(\frac{\pi\|x\|}{2}\right) \cdot \frac{x}{\|x\|} \quad (x \neq 0), \quad F(0) := 0.$$

$\boxed{\mathbf{26}}$ Es sei I eine nichtleere Menge und für jedes $i \in I$ sei X_i ein topologischer Raum. Zeige: Das Mengensystem

$$\mathcal{B} := \{\prod_{i \in I} U_i \mid \exists J \subseteq I, J \text{ endlich}\colon U_i \text{ offen in } X_i \text{ für } i \in J,\ U_i = X_i \text{ für } i \notin J\}$$

erfüllt die Eigenschaften einer Basis für eine Topologie auf $X := \prod_{i \in I} X_i$.

$\boxed{\mathbf{27}}$ Zeige, dass die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n$ bzgl. der euklidischen Topologien auf jedem Faktor gerade die n-dimensionale euklidische Topologie ist.

$\boxed{\mathbf{28}}$ Es sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie der topologischen Räume X und Y ausgestattet. Zeige für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$:

(a) $A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$,

(b) $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$.

In den folgenden beiden Aufgaben betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie. Zeige:

$\boxed{\mathbf{29}}$ (a) Intervalle sind zusammenhängend.

(b) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: A ist zusammenhängend $\implies \big(\forall x, y \in A, x < y\colon [x, y] \subseteq A\big)$.

$\boxed{\mathbf{30}}$ (a) Für $A \subseteq \mathbb{R}$ gilt: $\big(\forall x, y \in A, x < y\colon [x, y] \subseteq A\big) \implies A$ ist zusammenhängend.

(b) Die nichtleeren zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind genau die Intervalle; insbesondere ist $\mathbb{R}$ zusammenhängend.

$\boxed{\mathbf{31}}$ Sei X ein topologischer Raum. Zeige die folgenden beiden Eigenschaften der Zusammenhangskomponenten C_x für $x \in X$:

(i) C_x ist abgeschlossen,

(ii) $\forall x, y \in X\colon C_x = C_y$ oder $C_x \cap C_y = \emptyset$.

$\boxed{\mathbf{32}}$ Im $\mathbb{R}^2$ ist die Menge $G := \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0, 1]\}$ wegzusammenhängend (als Graph einer stetigen Funktion auf einem Intervall). Zeige:

(a) Der Abschluss ist $\overline{G} = G \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.

(b) $\overline{G}$ ist nicht wegzusammenhängend, aber zusammenhängend.

$\boxed{\mathbf{33}}$ Sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz im topologischen Raum X und $x \in X$. Zeige: Ist $(x_i)_{i \in I}$ konvergent gegen x, dann konvergiert auch jedes feinere Netz gegen x.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Wir haben in Beispiel 5.6,1) der VO gesehen, dass in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz die konstante Funktion 1 zwar zum Abschluss der Menge $E = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid g(x) \neq 0$ für nur endliche viele $x\}$ liegt, aber nicht als Grenzwert einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus E auftreten kann. Gib ein Netz in E an, das gegen 1 konvergiert.

(Hinweis: Betrachte als Indexmenge die Menge aller endlichen Teilmengen $J \subseteq \mathbb{R}$ und definiere $f_J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf naheliegende Weise.)

$\boxed{\mathbf{35}}$ Wir haben in Beispiel 5.6,2) der VO gesehen, dass es in $\Omega_0 = [0, \omega_1[$ keine Folge gibt, die in $\Omega = [0, \omega_1]$ gegen ω_1 konvergiert. Aus 2.23 wissen wir aber, dass $\omega_1 \in \overline{\Omega_0}$ ist, daher muss es ein Netz in Ω_0 geben, das gegen ω_1 konvergiert. Gib ein solches Netz an.

(Hinweis: Ω_0 selbst taugt als Indexmenge.)

$\boxed{\mathbf{36}}$ Zeige: (a) Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er ein AA2-Raum ist.

(b) Der Niemytzki-Raum ist ein separabler AA1-Raum, aber nicht metrisierbar.
(Hinweis für die Nichtmetriserbarkeit: Betrachte die x-Achse als Teilraum.)

$\boxed{\mathbf{37}}$ Zeige: Die Sorgenfrey-Gerade ist ein separabler Hausdorff-Raum und erfüllt AA1.

$\boxed{\mathbf{38}}$ Zeige: (a) Teilräume von T_2-Räumen sind stets T_2-Räume,

(b) Auf nichtleeren kartesischen Produkten sind Produkttopologien genau dann T_2, wenn jeder Faktor es ist.

$\boxed{\mathbf{39}}$ Sei X eine unendliche Menge und die sogenannte koendliche Topologie gegeben durch

$$\tau := \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ ist endlich}\} \cup \emptyset.$$

Zeige, dass τ eine Topologie auf X definiert, mit der (X, τ) ein T_1-Raum ist, der nicht die T_2-Eigenschaft erfüllt.

$\boxed{\mathbf{40}}$ Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq M$ nichtleere abgeschlossene disjunkte Teilmengen. Zeige, dass die Funktion $f\colon M \to [0, 1]$,

$$f(x) := \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)} \quad (x \in M),$$

eine Urysohn-Funktion für A, B ist, d.h. f ist stetig und es gilt $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.

$\boxed{\mathbf{41}}$ (Tychonoff-Planke, vgl. 6.8,2) in der VO) Es sei $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit der durch $n < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erweiterten Totalordnung und der davon abgeleiteten Ordnungstopologie versehen. Weiters sei $\Omega = [0, \omega_1]$ der Ordinalzahlraum (VO, 2.23 5.6,2)) und $\Omega_0 = [0, \omega_1[= \Omega \setminus \{\omega_1\}$. Wir setzen $X := (\Omega \times \overline{\mathbb{N}}) \setminus \{(\omega_1, \infty)\}$ und statten dies mit der Spurtopologie der Produkttopologie von $\Omega \times \overline{\mathbb{N}}$ aus. Zeige: Die beiden Teilmengen $A := \{\omega_1\} \times \mathbb{N} \subseteq X$ und $B := \Omega_0 \times \{\infty\} \subseteq X$ sind disjunkt und abgeschlossen in X. (In der VO wird gezeigt, dass A und B nicht durch offene Umgebungen getrennt werden können.)

$\boxed{\mathbf{42}}$ Wir betrachten $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Topologie und es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige direkt aus der Definition:

(a) Die Intervalle $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$ sind nicht kompakt. Ebenso sind die Teilmengen $]-\infty, b]$, $[a, \infty[$ und $\mathbb{R}$ nicht kompakt.

(b) Das beschränkte abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist kompakt.

$\boxed{\textbf{43}}$ Zeige: Für einen topologischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist kompakt,

(ii) X hat die endliche Durchschnittseigenschaft: Falls $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen $F_i \subseteq X$ ist und $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ erfüllt, dann gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, sodass $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.

$\boxed{\textbf{44}}$ Es sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Zeige: Ist X kompakt und A abgeschlossen, dann ist A kompakt,

$\boxed{\textbf{45}}$ Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt nirgends dicht, falls $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ gilt. Zeige: Ist $E \subseteq X$ offen oder abgeschlossen, dann ist der Rand ∂E nirgends dicht.